

# 関手の微積分について

信州大学理学部  
数理・自然情報科学教室  
玉木 大

April 2, 2010

---

# Contents

---

<b>Contents</b>	<b>i</b>
<b>Preface</b>	<b>1</b>
<b>Acknowledgements</b>	<b>1</b>
<b>1 関手の微積分とは何か?</b>	<b>3</b>
1.1 多重ループ空間のモデル	3
1.2 関数の微積分との比較	5
1.3 関手の微積分の例	7
1.3.1 Goodwillie Calculus	7
1.3.2 Orthogonal Calculus	9
1.3.3 Goodwillie-Weiss による埋め込みの空間の研究	10
<b>2 準備</b>	<b>11</b>
2.1 モデル圏	11
2.2 ホモトピー極限とホモトピー余極限	16
2.3 圏の分類空間について	32
<b>3 ホモトピー切除定理</b>	<b>37</b>
3.1 古典的なホモトピー切除定理	37
3.2 空間の立方体的図式	39
<b>4 Taylor タワーの構成</b>	<b>45</b>
4.1 Fiberwise Homotopy	45
4.2 ホモトピー関手の多項式近似	47
4.3 タワーの構成	53
<b>5 Taylor タワーの layer について</b>	<b>57</b>
5.1 Taylor タワーの第 $n$ 層	57
5.2 多変数の場合	58
5.3 Cross Effect	67
5.4 計算例	68
<b>6 Weiss の orthogonal calculus</b>	<b>73</b>
6.1 位相圏とその上で定義された関手のホモトピー (余) 極限	73
6.2 有限次元ベクトル空間の位相圏上の関手の微分	74
6.3 Stable splitting への応用	79
<b>Bibliography</b>	<b>83</b>
<b>Index</b>	<b>85</b>

## Preface

これは、筆者が2003年11月京都大学と2004年10月東京大学で行なった大学院生向けの集中講義の講義ノートである。それ以外でも、2004年から2005年にかけて信州大学の大学院生およびトポロジストにも聞いてもらった。

目標としたのは、まずホモトピー(余)極限に慣れ親しむこと、そしてそのための(co)simplicial techniqueの練習である。Goodwillie calculusには様々なホモトピー極限が使われ、それらの間の関係も必要になる。丁度良い題材だと思ったわけである。そこでこのノートでは、ホモトピー(余)極限について講義では触れなかったことを大幅に加筆した。特に、ホモトピー(余)極限のホモトピー不変性については講義で全く触れなかったのは反省している。

もちろん Goodwillie calculus を始めとして、「関手の微積分」そのものが現代の代数的そして幾何学的トポロジーで重要なテクニックとなっている。Aronne や Weiss の仕事を知っておいて損はない。そこで後半は Goodwillie 流の「関手の微積分」を行なうための基礎となることについて、できるだけ簡潔にまとめた。Goodwillie の証明が分り辛いと思ったところは、ホモトピー極限のホモトピー・スペクトル系列を用いたりして、できるだけ見通しがよくなるようにしたつもりである。

しかしながら、筆者は Goodwillie の論文を読んだとき、テクニックよりも「関手の微積分」という発想、そしてそのような発想ができる自由な精神に感銘を受けた。日本のトポロジストの中からも新鮮なアイデアがどんどん出てくるようになって欲しい、と思う。

## Acknowledgements

講義ではあいまいな点や不正確な点が数多くあり、何人もの人にそれを指摘していただいた。筆者の認識している限りで名前を上げれば、原田(京都大学)、大下(大阪経済大)、松岡(京都大学)、岸本(京都大学)、古田(東京大学)、河澄(東京大学)、松尾(東京大学)、二木(東京大学)、栗林(信州大学)など(敬称略)である。また残念ながら名前を存じ上げない他の人からも有用なコメントを数多くいただき、講義を行なう上で大きな励みになった。

もちろん集中講義行なう機会を与えて頂いた河野明(京都大学)氏と河野俊丈(東京大学)氏には深く感謝している。



# Chapter 1

## 関手の微積分とは何か?

関手の微積分 (calculus of functor) とは, Goodwillie により Waldhausen の空間の代数的  $K$  理論 [Wal78c, Wal79] を解析するために開発されたテクニック [Goo90, Goo92, Goo03] に基づくものである。Calculus (初歩の微積分) で関数を調べるように関手を調べることにより, その関手の値として得られる空間 (object) に関する情報が得られる。Weiss の論文 [Wei96] によると, Goodwillie は 80 年代には “関手の微積分” のアイデアを着想していたらしいが, そのことが可能であることは既に 1970 年代の多重ループ空間の研究により示唆されている。まずはその例から始めることにしよう。

### 1.1 多重ループ空間のモデル

基点付き空間  $X$  上の多重ループ空間

$$\Omega^n X = \text{Map}_*(S^n, X) = \{f : S^n \rightarrow X \mid f(*) = *\}$$

は写像空間の中では最も基本的なものであるが,  $X$  が十分 suspension を持つとき, つまり  $\Omega^n \Sigma^n X$  という形のものについては 1970 年代までの研究により良く分っている。その結果を述べるために次の概念が必要である。

**Definition 1.1.1.** Little  $n$ -cube とは,  $I^n$  から  $I^n$  への写像

$$c : I^n \rightarrow I^n$$

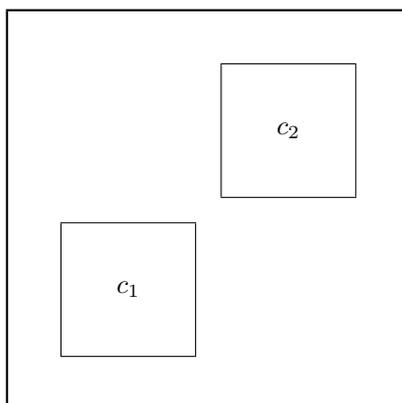
で, 各  $i$  について  $i$  番目の辺を  $i$  番目の辺に平行に (辺ごとに) 向きを保って写すアフィン写像のことである。コンパクト開位相により

$$\mathcal{C}_n(1) = \{c \mid \text{little } n\text{-cube}\}$$

を位相空間にする。そして高々面でしか交わっていない  $j$  個の cube の成す空間

$$\mathcal{C}_n(j) = \{(c_1, \dots, c_j) \in \mathcal{C}_n(1)^j \mid \text{Im } c_{i_1}(\text{Int } I^n) \cap \text{Im } c_{i_2}(\text{Int } I^n) = \emptyset \text{ if } i_1 \neq i_2\}$$

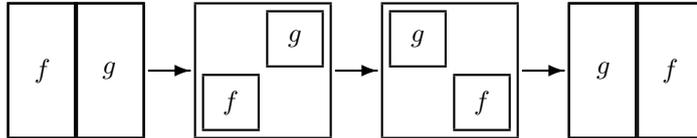
を  $j$  little  $n$ -cube の成す空間という。



このような空間が  $n$  重ループ空間の性質と深い関係にあるということは、例えば

$$\pi_0(\Omega^n X) = \pi_n(X, *) = [(I^n, \partial I^n), (X, *)]$$

であることから分かる。ホモトピー群  $\pi_n(X)$  が  $n \geq 2$  のときに Abel 群になるということは、ホモトピー論の教科書では上の絵を使って説明してあるのである。すなわち



といった感じの絵である。これは  $C_n(2)$  の中の道と考えることができ、 $n \geq 2$  ならば  $C_n(2)$  が弧状連結であるということから  $\pi_n(X, *)$  が可換、つまり  $\Omega^n X$  がホモトピー可換な Hopf 空間であることが従う。 $C_n(j)$  のより詳しい情報から  $\Omega^n X$  の性質を調べることができる、と考えたのが Boardman と Vogt [BV68, BV73] である。Boardman-Vogt の導入したこの little  $n$ -cube の空間  $C_n(j)$  を用いて、May は次の結果を証明 [May72] している。

**Theorem 1.1.2** (Approximation Theorem).  $X$  を基点  $*$  を持つ位相空間とする。  $\coprod_j C_n(j) \times_{\Sigma_j} X^j$  上の同値関係  $\sim$  を次の関係で生成されたものとする。

$$\begin{aligned} & (c_1, \dots, c_j; x_1, \dots, x_{i-1}, *, x_{i+1}, \dots, x_j) \\ & \sim (c_1, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_j; x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_j). \end{aligned}$$

この同値関係を用いて  $C_n(X)$  を

$$C_n(X) = \left( \prod_{j=0}^{\infty} C_n(j) \times_{\Sigma_j} X^j \right) / \sim$$

で定義する。ただし  $\Sigma_j$  は  $j$  次の対称群であり、 $C_n(j)$  と  $X^j$  に *permutation* で作用している。すると、 $X$  が弧状連結で基点が非退化なとき次の弱ホモトピー同値

$$C_n(X) \underset{w}{\simeq} \Omega^n \Sigma^n X$$

がある。

ここで、基点を保つ写像  $f: X \rightarrow Y$  が弱ホモトピー同値であるとは、 $f$  が任意の  $i$  に対しホモトピー群の同型

$$f_*: \pi_i(X) \rightarrow \pi_i(Y)$$

を誘導することである。

この弱ホモトピー同値、というより  $C_n(X)$  の構成を見てみると  $C^\infty$  級関数の (原点の周りの) Taylor 展開

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{d^j f}{dx^j}(0) x^j$$

によく似ていることに気がつくだろう。つまり

- $C_n(j)$  は関手  $X \mapsto \Omega^n \Sigma^n X$  の “ $j$  次微分係数”
- $\Sigma_j$  の作用で割ることは、関数では  $|\Sigma_j| = j!$  で割ること
- 空間の直積は、関数では実数の積
- …

などである。

## 1.2 関数の微積分との比較

さて、ある圏  $\mathcal{C}$  から別の圏  $\mathcal{D}$  への関手

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

があったとしよう。この関手に対し微積分と類似の操作を行なうことを考えよう。そのためには、まず  $\mathcal{C}$  や  $\mathcal{D}$  では極限が取れる必要があるだろう。また二つの object に関する四則演算も必要である。微分ができなくても差分ぐらいはできてほしいので、少なくとも差は必要である。

一般にある圏で二つの object  $X$  と  $Y$  を比較する場合は morphism  $f : X \longrightarrow Y$  を考える。位相空間の圏では“差”の候補としては、まずホモトピーファイバーが考えられる。

**Definition 1.2.1.** 連続写像  $f : X \longrightarrow Y$  と  $y_0 \in Y$  に対し

$$\text{hofiber}(f)_{y_0} = \{(\omega, x) \in \text{Map}(I, Y) \times X \mid \omega(0) = y_0, \omega(1) = x\}$$

を  $f$  の  $y_0$  上のホモトピーファイバーという。

**Remark 1.2.2.** ホモトピーファイバーは次の pull-back で定義されていることに注意する:

$$\begin{array}{ccc} \text{hofiber}(f)_{y_0} & \longrightarrow & P_{y_0}Y \\ \downarrow & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

ここで

$$P_{y_0}Y = \{\omega : I \longrightarrow Y \mid \omega(0) = y_0\}$$

であり  $p(\omega) = \omega(1)$  である。よく知られているように

$$p : P_{y_0}Y \longrightarrow Y$$

は (Hurewicz) fibration であり、その ( $y_0$  上の) fiber は  $y_0$  を基点とする  $Y$  のループ空間  $\Omega Y$  である。連続写像による pull-back は fibration を保つから

$$\Omega Y \longrightarrow \text{hofiber}(f)_{y_0} \longrightarrow X$$

という fibration を得る。よってホモトピー群の完全列

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(\Omega Y) \longrightarrow \pi_n(\text{hofiber}(f)_{y_0}) \longrightarrow \pi_n(X) \longrightarrow \pi_{n-1}(\Omega Y) \longrightarrow \cdots$$

を得る。  $\pi_{n-1}(\Omega Y) = \pi_0(\Omega^{n-1}\Omega Y) = \pi_0(\Omega^n Y) = \pi_n(Y)$  だから

$$\cdots \longrightarrow \pi_{n+1}(Y) \longrightarrow \pi_n(\text{hofiber}(f)_{y_0}) \longrightarrow \pi_n(X) \xrightarrow{f_*} \pi_n(Y) \longrightarrow \cdots$$

という完全列を得る。  $\text{hofiber}(f)_{y_0}$  が可縮ならば  $f_*$  は同型となり、この意味で  $\text{hofiber}(f)_{y_0}$  はホモトピー群で測った  $X$  と  $Y$  の差であると言える。

ホモトピー群ではなくホモロジー群で差を測ろうと思うとホモトピーコファイバーを用いなければならない。

**Definition 1.2.3.** 連続写像  $f : X \longrightarrow Y$  に対し、そのホモトピーコファイバーを

$$\text{hocofiber}(f) = X \cup_f CX = \left( Y \amalg CX \right) / (x, 0) \sim f(x)$$

で、つまり次の push-out の図式で定義する

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ CX & \longrightarrow & \text{hocofiber}(f) \end{array}$$

**Remark 1.2.4.** ホモトピーファイバーの定義では  $y_0 \in Y$  を選ぶ必要があったのにホモトピーコファイバーでは点を選んでいない。それは位相空間の圏では一点から成る空間が terminal object であるが initial object ではないことが原因である。基点付きの空間の圏なら一点から成る空間は initial object にもなるので、ホモトピーファイバーとホモトピーコファイバーの定義が完全に dual になる。

以下、基点付きでない場合もホモトピーファイバーを単に  $\text{hofiber}(f)$  と書くことにする。

このように二つの空間の差となるべきものが二種類考えられるが、どちらを使うかは時と場合によって使い分ける。次に必要なのは極限であるが、それにはホモトピー (余) 極限を使う。ホモトピー (余) 極限については §2.2 で復習する。

このような差と極限を用いて Goodwillie が得た結果は以下のものである。

**Theorem 1.2.5** ([Goo03]). 基点付き空間の圏  $\mathbf{Spaces}_*$  の間のホモトピー関手

$$F : \mathbf{Spaces}_* \longrightarrow \mathbf{Spaces}_*$$

に対し関手

$$P_n F : \mathbf{Spaces}_* \longrightarrow \mathbf{Spaces}_*$$

と自然変換

$$\begin{aligned} q_n &: P_n F \longrightarrow P_{n-1} F \\ p_n &: F \longrightarrow P_n F \end{aligned}$$

で次の性質をみたすものが存在する:

1. 任意の  $X$  に対し次の図式が可換

$$\begin{array}{ccc} & & P_n F(X) \\ & \nearrow p_n & \downarrow q_n \\ F(X) & \xrightarrow{p_{n-1}} & P_{n-1} F(X) \end{array}$$

2.  $D_n F(X) = \text{hofiber}(q_n)$  とおくと  $n$  次対称群  $\Sigma_n$  が作用するスペクトラム  $C_{F,n}$  で自然な弱ホモトピー同値

$$D_n F(X) \underset{w}{\simeq} \Omega^\infty \left( (C_{F,n} \wedge X^{\wedge n})_{h\Sigma_n} \right)$$

を持つものが存在する。

3.  $X$  が  $(\rho + 1)$  連結で  $F$  が  $\rho$ -analytic ならば自然な弱ホモトピー同値

$$F(X) \underset{w}{\simeq} \text{holim}_n P_n F(X)$$

がある。

ここで、ホモトピー関手とは弱ホモトピー同値を保つ関手である。 $P_n F(X)$  は、 $F$  の  $n$  次多項式による近似と言えるものであり、原点の周りでの  $C^\infty$  級の関数  $f(x)$  の  $n$  次多項式による近似

$$p_n f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{d^k f}{dx^k}(0) x^k$$

に対応するものである。Taylor 展開の  $n$  次の項は

$$p_n f(x) - p_{n-1} f(x) = \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}(0) x^n$$

で与えられるので, Goodwillie tower の  $n$  次 “項” を  $P_n F(X)$  と  $P_{n-1} F(X)$  の “差”, つまりホモトピーファイバーとして定義してもよいだろう。よって  $C_{F,n}$  が  $F$  の  $n$  次導関数 (の原点での値) に対応する。  $(-)_h\Sigma_n$  は homotopy orbit space と呼ばれるもので, ホモトピー論的に  $\Sigma_n$  の作用で割ってできる空間である。  $n$  次対称群の位数は  $n!$  だから, 関数の Taylor 展開の  $n$  次項の  $\frac{1}{n!}$  とうまく対応している。

$f(x)$  が原点の周りで解析的ならば Taylor 級数が収束する (というよりこれが解析的であることの定義), つまり十分小さな  $x$  に対し

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{d^k f}{dx^k}(0) x^k$$

であるが, 実数の原点に対応するのは空間では一点から成る空間  $*$  のことであり, 上の 3 は  $F$  が “解析的” であり  $X$  の連結性が十分高い, つまり  $X$  が  $*$  と十分近いならば  $F(X)$  が  $P_n F(X)$  の極限として表わされる, ということを行っている。

### 1.3 関手の微積分の例

関手の微積分の例としては, 以下のものがある。

#### 1.3.1 Goodwillie Calculus

Goodwillie は  $\mathcal{C}$  を位相空間, 基点付き位相空間,  $B$  上の位相空間, スペクトラムなどの圏とし  $\mathcal{D}$  を位相空間やスペクトラムの圏としたとき, ホモトピー関手

$$F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$$

を考えた。

Goodwillie は, Blakers-Massey のホモトピー切除定理の一般化を空間の立方体的図式の total homotopy fiber の性質とみなすことにより, Taylor tower

$$\dots \rightarrow P_n F(X) \rightarrow \dots \rightarrow P_0 F(X) = *$$

を構成した。

Arone と Mahowald [AM99] は,  $F$  が identity functor  $I$  で  $X$  が奇素数  $p$  で局所化された奇数次元球面  $S_{(p)}^{2n-1}$  の場合に  $D_k I(S_{(p)}^{2n-1})$  を考察し, 以下の結果を得た。

**Theorem 1.3.1** (Arone-Mahowald). 奇素数  $p$  に対し  $k$  が  $p$  中でなければ

$$D_k I(S_{(p)}^{2n-1}) \simeq *$$

である。また  $k = p^\ell$  のとき,  $D_{p^\ell} I(S_{(p)}^{2n-1})$  は  $S^{2n-1}$  と  $v_\ell$ -periodic ホモトピー群が同型になる。

よって,  $S_{(p)}^{2n-1}$  の fibration の tower による分解

$$S_{(p)}^{2n-1} \simeq \operatorname{holim}_w \left( \dots \rightarrow P_{p^\ell} I(S_{(p)}^{2n-1}) \rightarrow \dots \rightarrow P_1 I(S_{(p)}^{2n-1}) \rightarrow P_0 I(S_{(p)}^{2n-1}) = * \right)$$

を得る。特に,

$$S_{(p)}^{2n-1} \rightarrow P_{p^\ell} I(S_{(p)}^{2n-1})$$

は  $v_0, \dots, v_\ell$ -periodic homotopy 同値になる。これは次の Serre の古典的な結果 [Ser53] の一般化と考えられる。

**Theorem 1.3.2.** 素数  $p$  に対し, 自然な写像

$$S_{(p)}^{2n-1} \rightarrow \Omega^\infty \Sigma^\infty S_{(p)}^{2n-1}$$

は  $v_0$ -periodic homotopy 同値

$$v_0^{-1} \pi_* (S_{(p)}^{2n-1}) \rightarrow v_0^{-1} \pi_*^S (S_{(p)}^{2n-1})$$

を誘導する。

球面の  $v_1$ -periodic ホモトピー群については, Mahowald [Mah82] と Thompson [Tho90] の研究がある。球面の  $v_1$ -periodic な部分を表わすスペクトラム, つまり上の Serre の結果の類似についても, Mahowald と Thompson [MT92] が研究している。

**Theorem 1.3.3.** 奇素数  $p$  に対し, スペクトラム  $D_{1,p}^n$  と  $v_1$ -periodic homotopy 同値写像

$$S_{(p)}^{2n-1} \longrightarrow \Omega^\infty D_{1,p}^n$$

が存在する。つまり同型

$$v_1^{-1}\pi_*(S_{(p)}^{2n-1}) \longrightarrow v_1^{-1}\pi_*(D_{1,p}^n)$$

がある。ここでこの同型の定義域の群は位相空間の (*unstable*) ホモトピー群であり, 値域はスペクトラムのホモトピー群である。

上の  $D_{1,p}^n$  は Snaith splitting

$$\Omega^n \Sigma^n X \underset{S}{\simeq} \bigvee_{j=1}^{\infty} \mathcal{C}_n(j)_+ \wedge_{\Sigma_j} X^{\wedge j}$$

を用いて構成されたが, この Snaith splitting 自体も Taylor tower を用いると簡単に証明できる。

**Example 1.3.4.** 基点付き空間  $X$  に対し Theorem 1.1.2 の  $C_n(X)$  を考える。  $k \geq 0$  に対し

$$F_k C_n(X) = \left( \prod_{j=1}^k \mathcal{C}_n(j) \times_{\Sigma_j} X^j \right) / \sim$$

とおき  $C_n(X)$  の部分空間とみなす。ただし  $F_0 C_n(X) = *$  である。

すると

$$F_k C_n(X) / F_{k-1} C_n(X) = \mathcal{C}_n(j) \wedge_{\Sigma_j} X^{\wedge j}$$

であり, Taylor tower の第  $k$  項の形に非常に近い。

実際,

$$D_{n,k} : \mathbf{Spaces} \longrightarrow \mathbf{Spectra}$$

を

$$D_{n,k}(X) = \Sigma^\infty (F_k C_n(X) / F_{k-1} C_n(X))$$

と定義すると,  $D_{n,k}$  は  $k$ -homogeneous, つまり

$$\begin{aligned} P_{k-1} D_{n,k}(X) &\underset{w}{\simeq} * \\ P_{k+\ell} D_{n,k}(X) &\underset{w}{\simeq} P_k D_{n,k}(X) \end{aligned}$$

である。この事実から  $C_n(X)$  の stable splitting が以下のように証明できる:

まず  $X$  の基点が非退化なとき

$$F_{k-1} C_n(X) \hookrightarrow F_k C_n(X) \longrightarrow F_k C_n(X) / F_{k-1} C_n(X)$$

は cofibration であることに注意する。よって stable homotopy category でも

$$\Sigma^\infty F_{k-1} C_n(X) \hookrightarrow \Sigma^\infty F_k C_n(X) \longrightarrow D_{n,k}(X)$$

は cofibration である。このとき次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma^\infty F_{k-1} C_n(X) & \longrightarrow & \Sigma^\infty F_k C_n(X) & \longrightarrow & D_{n,k}(X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ P_{k-1} \Sigma^\infty F_{k-1} C_n(X) & \longrightarrow & P_{k-1} \Sigma^\infty F_k C_n(X) & \longrightarrow & P_{k-1} D_{n,k}(X) \end{array}$$

この図式の横の列は共に cofibration である。上に述べたことから  $P_{k-1}D_{n,k}(X) \underset{w}{\simeq} *$  であり

$$P_{k-1}\Sigma^\infty F_{k-1}C_n(X) \underset{w}{\simeq} P_{k-1}\Sigma^\infty F_k C_n(X)$$

となる。また  $k$  に関する帰納法で

$$\Sigma^\infty F_{k-1}C_n(X) \underset{w}{\simeq} P_{k-1}\Sigma^\infty F_{k-1}C_n(X)$$

が示されたとすると、上の図式から

$$\begin{aligned} \Sigma^\infty F_k C_n(X) &\underset{w}{\simeq} P_{k-1}\Sigma^\infty F_{k-1}C_n(X) \vee D_{n,k}(X) \\ &\underset{w}{\simeq} \Sigma^\infty F_{k-1}C_n(X) \vee D_{n,k}(X) \end{aligned}$$

となり、また

$$\begin{aligned} P_k \Sigma^\infty F_k C_n(X) &\underset{w}{\simeq} P_k (P_{k-1}\Sigma^\infty F_{k-1}C_n(X) \vee D_{n,k}(X)) \\ &\underset{w}{\simeq} P_{k-1}\Sigma^\infty F_{k-1}C_n(X) \vee P_k D_{n,k}(X) \\ &\underset{w}{\simeq} \Sigma^\infty F_{k-1}C_n(X) \vee D_{n,k}(X) \\ &\underset{w}{\simeq} \Sigma^\infty F_k C_n(X) \end{aligned}$$

となる。

よって帰納的に

$$\Sigma^\infty F_k C_n(X) \underset{w}{\simeq} \bigvee_{j=1}^k D_{n,j}(X)$$

が示され、sequential colimit とホモトピー群が可換なことより

$$\Sigma^\infty C_n(X) \underset{w}{\simeq} \bigvee_{j=1}^{\infty} D_{n,j}(X)$$

を得る。 □

### 1.3.2 Orthogonal Calculus

Weiss は, [Wei95] で定義域が内積を持つ  $\mathbb{R}$  または  $\mathbb{C}$  上の有限次元ベクトル空間の圏  $\mathcal{F}$  である continuous functor を考えた。つまり functor

$$F : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbf{Spaces}$$

で, evaluation map

$$\mathrm{mor}(V, W) \wedge F(V) \longrightarrow F(W)$$

が連続であるものである。ここで  $\mathrm{mor}(V, W)$  は  $\mathcal{F}$  における morphism の集合を Stiefel 多様体とみなして位相を入れたものである。

このような写像の典型的な例としては、基点付き位相空間  $X$  に対し

$$F(V) = \Omega^V \Sigma^V X = \mathrm{Map}_*(S^V, X \wedge S^V)$$

で与えられるものがある。ここで  $S^V$  は  $V$  の一点コンパクト化である。

$\mathcal{F}$  の morphism

$$i : V \hookrightarrow W$$

はベクトル空間の包含写像であり,

$$F(i) : \Omega^V \Sigma^V X \longrightarrow \Omega^W \Sigma^W X$$

は Freudenthal suspension とみなすことができる。

Weiss は, このような continuous functor  $F$  に対し, その  $V$  における微分を

$$F^{(1)}(V) = \text{hofiber}(F(V) \longrightarrow F(V \oplus \mathbb{R}))$$

で定義した。このホモトピーファイバーの構成を詳しく調べることにより, ある写像

$$\sigma_1 : F^{(1)}(V) \longrightarrow \Omega dF^{(1)}(V \oplus \mathbb{F})$$

を定義した。ここで  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  または  $\mathbb{C}$  であり,  $d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F}$  である。そしてこの写像のホモトピーファイバーをとることにより  $F$  の 2 階微分

$$F^{(2)}(V) = \text{hofiber}(\sigma_1 : F^{(1)}(V) \longrightarrow \Omega^d F^{(1)}(V \oplus \mathbb{F}))$$

を定義した。この構成は繰り返すことができ

$$\sigma_n : F^{(n)}(V) \longrightarrow \Omega^{dn} F^{(n)}(V \oplus \mathbb{C})$$

を得る。 $F(V) = \Omega^V \Sigma^V X$  のとき, これは高次の Freudenthal suspension とみなすことができる。

奇素数  $p$  と  $X = S_{(p)}^{2n-1}$  に対し, Arone [Aro98] は  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$  のときこの functor  $F^{(n)}(V)$  を調べている。

### 1.3.3 Goodwillie-Weiss による埋め込みの空間の研究

上の orthogonal calculus は, 定義域が位相圏であるという点で元々の Goodwillie calculus にはない困難がある。もつとも small category なので集合論的な困難はないが。

定義域が位相圏である continuous functor に対しても, そのホモトピー極限やホモトピー余極限が定義され, それらを用いると幾何学的な問題から派生した functor を調べることができる。

そのような例としては, Goodwillie-Weiss による埋め込みの空間の研究 [Wei99, GW99] がある。 $M$  と  $N$  を境界の無い滑かな多様体とし,  $\mathcal{O}(M)$  を  $M$  の開集合と包含写像の成す位相圏とする。すると関手

$$\text{emb}(-, N) : \mathcal{O}(M) \longrightarrow \mathbf{Spaces}$$

に対し calculus を行なうことにより smooth embedding の成す空間  $\text{emb}(M, N)$  を調べることができる。

また, このアイデアを結び目の成す空間に適用したり [Sim], ということも行なわれている。

# Chapter 2

## 準備

この章では, calculus of functor を行なうための一般的な設定および必要な技術を解説する。

### 2.1 モデル圏

現在, ホモトピー論的な構成を行なう場として最も一般的なものはモデル圏である。Goodwillie 流の関手の微積分についても, やはりモデル圏で議論するのがよいだろう。この section ではモデル圏について復習する。

モデル圏は Quillen により導入された [Qui67] 概念であるが, その定義は Quillen 自身 [Qui69], そして最近では Hovey らにより改良されている。現在最も一般的な定義は, Hovey の本 [Hov99] によるものと思われるので, ここでもほぼ Hovey に従ってモデル圏を扱う。モデル圏におけるホモトピー極限などは Hirschhorn の本 [Hir03] を参考にした。

モデル圏に関する解説としては, Dwyer-Spalinski のもの [DS95] がお勧めである。Quillen が [Qui67] で定義せずに用いている用語 “(co)base change” についても定義を与えている。モデル圏について勉強しようと思う人には, この [DS95] を読んでから Hovey の本で本格的に取り組むことをお勧めする。もし fibration や cofibration などの概念にあまり馴染みがない場合は, モデル圏の公理の意味が理解し辛いかもしれない。その際は [Str72] を読んでみるとよいだろう。

**Definition 2.1.1.** モデル圏とは圏  $\mathcal{C}$  に fibration, cofibration, weak equivalence と呼ばれる三種類の morphism が指定されたもので, 次の条件をみたすものである:

1. (部分圏) fibration, cofibration, weak equivalence それぞれ subcategory を成す。つまり恒等射は fibration でも cofibration でも weak equivalence でもあり, それぞれの morphism 達は合成で閉じている。
2. (完備)  $\mathcal{C}$  は任意の limit と colimit で閉じている。
3. (2-out-of-3)  $f$  と  $g$  を  $g \circ f$  が存在する  $\mathcal{C}$  の morphism とする。このとき  $f, g, g \circ f$  のどれか二つが weak equivalence ならば, 残り一つもそうである。
4. (リフト) 次の可換図式で

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ \downarrow i & & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

$i$  が cofibration で  $p$  が fibration で,  $i$  か  $p$  のどちらかが weak equivalence ならば, 図式を可換にする morphism

$$B \longrightarrow X$$

が存在する。

5. (分解) 任意の morphism  $f : X \longrightarrow Y$  は, weak equivalence である fibration  $p : E \longrightarrow Y$  と cofibration  $i : X \longrightarrow E$  により  $f = p \circ i$  と分解できる。また,  $p$  を fibration で  $i$  を weak equivalence である cofibration とすることもできる。

6. (レトラクト) 次の可換図式で水平な合成が共に恒等射であるとする。

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & C & \longrightarrow & A \\ f \downarrow & & g \downarrow & & \downarrow f \\ B & \longrightarrow & D & \longrightarrow & B \end{array}$$

このとき  $g$  が fibration, cofibration, weak equivalence ならば  $f$  もそうである。

このように、モデル圏は多くのデータと条件から成るものであるが、少しでも簡潔に述べるためにいくつか用語を用意しておくとうい。

**Definition 2.1.2.** モデル圏  $\mathcal{C}$  において、weak equivalence かつ (co)fibration である morphism を trivial (co)fibration という。

$i : A \rightarrow B$  と  $p : X \rightarrow Y$  を  $\mathcal{C}$  の morphism とする。可換図式

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

に対し、図式を可換にする morphism

$$B \longrightarrow X$$

が存在するとき、 $i$  は  $p$  に関し left lifting property を持つといい、 $p$  は  $i$  に関し right lifting property を持つという。

上の公理の中で、現在では分解については次のようにより強い条件を要求するのが一般的である。

**Definition 2.1.3.** 圏  $\mathcal{C}$  に対し、圏  $\text{Map } \mathcal{C}$  を object は  $\mathcal{C}$  の morphism, morphism は可換な四角の図式として定義する。

$\mathcal{C}$  における functorial factorization とは、関手

$$\begin{aligned} \alpha & : \text{Map } \mathcal{C} \longrightarrow \text{Map } \mathcal{C} \\ \beta & : \text{Map } \mathcal{C} \longrightarrow \text{Map } \mathcal{C} \end{aligned}$$

の対  $(\alpha, \beta)$  であり、任意の  $\mathcal{C}$  の morphism  $f$  に対し  $\beta(f) \circ \alpha(f)$  が定義され

$$f = \beta(f) \circ \alpha(f)$$

が成り立つものである。

**Definition 2.1.4.** モデル圏とは圏  $\mathcal{C}$  に fibration, cofibration, weak equivalence と呼ばれる三種類の morphism および二組の functorial factorization  $(\alpha, \beta)$  と  $(\gamma, \delta)$  が指定されたもので、Definition 2.1.1 の 1~3 と 5 および次の公理をみたすものである。

4. 任意の morphism  $f$  に対し、 $\alpha(f)$  は cofibration で  $\beta(f)$  は trivial fibration である。また  $\gamma(f)$  は trivial cofibration で  $\delta(f)$  は fibration である。

位相空間の圏でホモトピー論を行なうときには、二つの object の間のホモトピー集合  $[X, Y]$  が主要な研究対象である。 $[X, Y]$  を morphism の集合とした圏を位相空間の圏のホモトピー圏 (homotopy category) というが、一般にモデル圏でもそのホモトピー圏を定義できる。位相空間のときには  $[X, Y]$  はホモトピーを用いて定義されるが、モデル圏にあるのは弱ホモトピー同値に対応する概念である。そこで、普通は弱ホモトピー同値を位相空間の間の同値関係に拡張したプロセスを真似してホモトピー圏を定義する。

**Definition 2.1.5.** モデル圏  $\mathcal{C}$  に対し, その weak equivalence 達を isomorphism とみなす操作を行なってできた圏を  $\mathcal{C}$  のホモトピー圏といい  $\text{Ho}(\mathcal{C})$  と書く。より正確には weak equivalence の成す部分圏  $\mathcal{W}$  に関し局所化してできる圏  $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$  である。

**Remark 2.1.6.** 一般のモデル圏でも functorial factorization から cylinder object と path object を定義し, homotopy (left homotopy と right homotopy) を定義することができる。その定義を先に見た方が分かりやすいかもしれない。

[DS95] では, まずこのような通常の位相空間の圏での  $[X, Y]$  の構成に似た方法でホモトピー圏が定義してあり, その後に圏の局所化による定義がある。より詳しくは [Hov99] を読むとよい。

モデル圏は完備なので initial object  $0$  と terminal object  $*$  を持つ。

**Definition 2.1.7.** モデル圏  $\mathcal{C}$  の object  $X$  が fibrant であるとは

$$X \longrightarrow *$$

が fibration であることである。また  $X$  が cofibrant であるとは

$$0 \longrightarrow X$$

が cofibration であることである。

Fibrant および cofibrant object は, モデル圏で様々な構成を行なう際に重要な役割を果たす。Functorial factorization の公理から, 任意の object は fibrant もしくは cofibrant な object に置き換えることができる。より正確には

$$0 : 0 \longrightarrow X$$

に対し functorial factorization の  $(\alpha, \beta)$  を用いることにより, 分解

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{0} & X \\ & \searrow \alpha(0) & \nearrow \beta(0) \\ & & QX \end{array}$$

を得る。よって functor

$$Q : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

を得るが,  $QX$  を  $X$  の cofibrant replacement という。同様に  $(\gamma, \delta)$  から fibrant replacement  $RX$  が得られる。

**Example 2.1.8.** モデル圏の基本は単体的集合 (simplicial set) の圏である。単体的集合の morphism

$$f : X \longrightarrow Y$$

が weak equivalence であるとは, 幾何学的実現の間に誘導する写像

$$|f| : |X| \longrightarrow |Y|$$

が弱ホモトピー同値, よってホモトピー同値であることと定義する。Cofibration は包含写像, fibration は Kan fibration として定義すると, これで単体的集合の圏はモデル圏になる。

単体的集合の圏の fibrant object は Kan complex と呼ばれるものである。また全ての単体的集合は cofibrant である。□

**Example 2.1.9.** 位相空間の圏のモデル構造はちょっと複雑である。まず fibration として Serre fibration と Hurewicz fibration が考えられることから分かるように, いくつかの選択肢がある。

Quillen は, Serre fibration を fibration とし弱ホモトピー同値を weak equivalence とするモデル構造を考えた。これは単体的集合の圏を基準にし, 幾何学的実現がモデル圏の同値を与えるように定義したモデル構造とみなすことができる。これについては Hovey の本 [Hov99] の §2.4 に詳しい。

別の、より自然なモデル構造として Strøm によるもの [Str72] がある。ホモトピー同値を weak equivalence, Hurewicz fibration を fibration, そして NDR pair の inclusion (closed cofibration) を cofibration として、位相空間の圏がモデル圏になることが確かめられている。Størm は [Qui67] の定義を用いているが、上の Hovey の定義もみたくことを確かめるのは難しくない。

いづれのモデル構造でも、全ての object は fibrant である。Quillen のモデル構造では cofibration は relative cell complex の inclusion の retract として得られる写像であることが分り、よって cofibrant object は weak topology を持つ cell complex の retract として得られるものである。よって cofibrant replactment は CW approximation である。□

**Example 2.1.10.** ホモロジー代数はホモトピー代数の一部とみなすことができる。

環  $R$  に対し、負の次元が 0 である differential graded left  $R$ -module を  $R$  上の chain complex ということにしよう。また  $R$  上の chain complex と chain map の圏を  $\mathbf{Chains}/R$  と書くことにする。すると quasi-isomorphism (quism), つまりホモロジーの同型を誘導する chain map を weak equivalence, epimorphism を fibration, 各次元で cokernel が projective である monomorphism を cofibration として  $\mathbf{Chains}/R$  はモデル圏になる。

このとき left  $R$ -module  $M$  に対し  $S^n(M)$  を次元  $n$  が  $M$  で他が 0 の chain complex とすると、 $M$  の projective resolution とは  $S^0(M)$  の cofibrant replacement のことである。よって

$$[S^n(M), S^0(N)] = \text{Ext}_R^n(M, N)$$

となる。ここで  $[-, -]$  はモデル圏のホモトピー圏における morphism の集合である。

$\text{Ext}_R^n(M, N)$  は  $N$  の injective resolution によっても定義できるように、injective module を用いて  $\mathbf{Chains}/R$  にモデル圏の構造を定義することもできる。つまり、各次元で kernel が injective である epimorphism を fibration, monomorphism を cofibration とするモデル構造である。もちろん、このモデル構造と上のモデル構造は同値 (Quillen 同値) である。

これらのこと、そしてより一般的な負の次元もある differential graded module の圏のモデル構造については、Hovey の本の §2.3 に詳しい。□

**Example 2.1.11.** モデル圏  $\mathcal{C}$  に対し、小圏  $\mathcal{X}$  からの covariant functor の成す圏

$$\text{Funct}(\mathcal{X}, \mathcal{C})$$

つまり、 $\mathcal{C}$  内の  $\mathcal{X}$  図式の圏を考える。この圏での自然なモデル構造としては、object ごとのもの、つまり morphism

$$\varphi : F \longrightarrow G$$

は、各 object  $X \in \mathcal{X}$  に対し

$$\varphi(X) : F(X) \longrightarrow G(X)$$

が  $\mathcal{C}$  で弱同値なものを、弱同値として定義するのが自然だろう。

一般には、これを拡張して  $\text{Funct}(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  をモデル圏にすることができるかどうかは分からないが、 $\mathcal{X}$  や  $\mathcal{C}$  がある条件をみたせば、モデル圏になる。例えば  $\mathcal{C}$  がコンパクト生成空間の圏や単体的集合の圏ならよい。より詳しくは、Dwyer-Hirschhorn-Kan の preprint [DHK] を見るとよい。(最近 AMS から出版されたようである。)

後に見るように  $\text{Funct}(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  がモデル圏になると、ホモトピー (余) 極限の概念が定義できる。□

上のように、あるモデル圏から別のモデル圏を構成することはよくあることである。この講義で使うもう一つの例として comma category がある。

**Definition 2.1.12.** 圏  $\mathcal{C}$  の object  $B$  を fix する。Object が二つ、 $\emptyset$  と  $\{1\}$ , で identity morphism 以外の morphism が一つ

$$\emptyset \longrightarrow \{1\}$$

である圏を  $\mathcal{P}(\langle 1 \rangle)$  とする。  $\text{Funct}(\mathcal{P}(\langle 1 \rangle), \mathcal{C})$  の full subcategory で

$$F(\{1\}) = B$$

をみたすものを  $(\mathcal{C} \downarrow B)$  と書く。これは  $\mathcal{C}$  の morphism

$$X \longrightarrow B$$

を morphism にし, 可換図式

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow & \swarrow \\ & B & \end{array}$$

を morphism にする圏である。これを  $B$  上の object の成す圏という。もちろん  $\text{Mor}(\mathcal{C})$  の subcategory でもある。また

$$F(\emptyset) = B$$

をみたすものからなる  $\text{Func}(\mathcal{P}(\langle 1 \rangle), \mathcal{C})$  の full subcategory を  $(B \downarrow \mathcal{C})$  と書く。これらを comma category という。より一般的な構成については Mac Lane の本 [ML98] の第 II 章 6 節にある。

**Example 2.1.13.**  $\mathcal{C}$  が terminal object  $*$  を持つとき,  $(* \downarrow \mathcal{C})$  は  $\mathcal{C}$  の基点付き object の成す圏である。  $\square$

**Definition 2.1.14.** 圏  $\mathcal{C}$  の object  $B$  を fix する。  $(\mathcal{C} \downarrow B)_*$  を, morphism

$$\begin{aligned} p &: X \longrightarrow B \\ s &: B \longrightarrow X \end{aligned}$$

で  $p \circ s = 1_B$  をみたすものを object とし, morphism を

$$f: X \longrightarrow Y$$

で

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow & \swarrow \\ & B & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \swarrow & \searrow \\ & B & \end{array}$$

を可換にするものを morphism とする圏とする。これを  $\mathcal{C}$  の  $B$  上の基点付き object の成す圏という。

$\mathcal{C}$  が位相空間の圏のときには,  $(\mathbf{Spaces} \downarrow B)$  と  $(\mathbf{Spaces} \downarrow B)_*$  は, それぞれ  $B$  上の空間の圏と  $B$  上の基点付き空間の圏と呼ばれてきたものである。これらの圏の対象に対して, 「ホモトピー論」ができることは古くから知られていたことで, [Smi70b, Smi70a] などで Eilenberg-Moore スペクトル系列の構成に使われている。また fiberwise topology (homotopy theory) という分野 [CJ98] もできている。実際  $(\mathbf{Spaces} \downarrow B)$  がモデル圏の構造を持つことは Hirschhorn の本 [Hir03] に述べてある。

一般に, モデル圏  $\mathcal{C}$  とその object  $B$  に対し  $(\mathcal{C} \downarrow B)$  の自然なモデル構造としては, forgetful functor

$$\mathcal{O}: (\mathcal{C} \downarrow B) \longrightarrow \mathcal{C}$$

を考え,  $(\mathcal{C} \downarrow B)$  の morphism  $f$  が weak equivalence, cofibration, fibration であることを  $\mathcal{O}(f)$  が weak equivalence, cofibration, fibration であることとして定義することが考えられる。

**Theorem 2.1.15** ([Hir03] Theorem 7.6.5). モデル圏  $\mathcal{C}$  とその object  $B$  に対し, 上の定義により  $(\mathbf{Spaces} \downarrow B)$  はモデル圏の構造を持つ。

Hirschhorn は, 更に left proper や cellular などのモデル圏の構造が, comma category の構成で保たれることも述べている。

## 2.2 ホモトピー極限とホモトピー余極限

ホモトピー極限などは、圏の分類空間を用いて構成される。まずは普通の (co)limit の定義を思い出そう。

**Definition 2.2.1.** 小圏  $\mathcal{X}$  から圏  $\mathcal{C}$  への functor

$$F : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{C}$$

の colimit とは、 $\mathcal{C}$  の object  $\operatorname{colim} F$  と morphism の族  $\{F(\alpha) \longrightarrow \operatorname{colim} F \mid \alpha \in \operatorname{ob}(\mathcal{X})\}$  で次をみたすものである。

1. 任意の  $\mathcal{X}$  の morphism  $f : \alpha \longrightarrow \beta$  に対し次は可換:

$$\begin{array}{ccc} F(\alpha) & \xrightarrow{F(f)} & F(\beta) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \operatorname{colim} F & \end{array}$$

2.  $\mathcal{C}$  の morphism の族  $\{F(\alpha) \longrightarrow A \mid \alpha \in \operatorname{ob}(\mathcal{X})\}$  で、任意の  $\mathcal{X}$  の morphism  $f : \alpha \longrightarrow \beta$  に対し図式

$$\begin{array}{ccc} F(\alpha) & \xrightarrow{F(f)} & F(\beta) \\ & \searrow & \swarrow \\ & A & \end{array}$$

を可換にするものがあれば、morphism

$$\operatorname{colim} F \longrightarrow A$$

で、各  $\alpha$  に対し図式

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{colim} F & \longrightarrow & A \\ & \swarrow & \nearrow \\ & F(\alpha) & \end{array}$$

を可換にするものが一意的に存在する。

つまり colimit とは coequalizer

$$\coprod_{f:\alpha\rightarrow\beta} F(\alpha) \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi} \\ \xrightarrow{\psi} \end{array} \coprod_{\alpha\in\operatorname{ob}(\mathcal{X})} F(\alpha) \longrightarrow \operatorname{colim} F \quad (2.1)$$

である。ただし  $\varphi$  は  $f$  の成分に制限すると  $F(f)$  であり、 $\psi$  は恒等射である。  
より簡潔に述べるためには少し記号が必要である。

**Definition 2.2.2.**  $\mathcal{X}$  を small category とし  $\mathcal{C}$  を圏とする。 $\mathcal{C}$  の object  $C$  に対し constant diagram を対応させる functor を

$$\operatorname{diag} : \mathcal{C} \longrightarrow \operatorname{Funct}(\mathcal{X}, \mathcal{C})$$

で表わす。

**Proposition 2.2.3.**  $\operatorname{colim}$  は  $\operatorname{diag}$  の left adjoint である:

$$\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(\operatorname{colim} F, C) = \operatorname{Mor}_{\operatorname{Funct}(\mathcal{X}, \mathcal{C})}(F, \operatorname{diag} C)$$

**Example 2.2.4.**  $\mathcal{X}$  を集合  $\{1, 2\}$  の proper subset と包含写像から成る圏とする。つまり  $\mathcal{X}$  とは図式

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & \{1\} \\ & & \downarrow \\ & & \{2\} \end{array}$$

のことである。 $F$  を object に対しては

$$\begin{aligned} F(\emptyset) &= S^{n-1} \\ F(\{1\}) &= D^n \\ F(\{2\}) &= D^n \end{aligned}$$

とし, morphism は自然な包含写像で定義する。すると

$$\operatorname{colim} F = D^n \cup_{S^{n-1}} D^n = S^n$$

である。一方

$$\begin{aligned} G(\emptyset) &= S^{n-1} \\ G(\{1\}) &= \{*\} \\ G(\{2\}) &= \{*\} \end{aligned}$$

とすると

$$\operatorname{colim} G = \{*\}$$

である。

$F$  と  $G$  は次の可換図式

$$\begin{array}{ccccc} D^n & \longleftarrow & S^{n-1} & \longrightarrow & D^n \\ \simeq \downarrow & & \parallel & & \downarrow \simeq \\ \{*\} & \longleftarrow & S^{n-1} & \longrightarrow & \{*\} \end{array}$$

で関連づけられ, 縦の写像はすべてホモトピー同値である。しかしながら

$$\operatorname{colim} F \not\cong \operatorname{colim} G$$

となる。 □

このように, colimit はホモトピーと相性があまりよくない。このことをより正確に述べるためにはモデル圏の言葉を使うのが便利である。まずは, 関手  $\operatorname{colim}$  の定義域のモデル構造をハッキリさせないといけない。Example 2.1.11 で触れたように次が成り立つ。

**Theorem 2.2.5.** 小圏  $\mathcal{X}$  に対し,  $\operatorname{Func}(\mathcal{X}, \mathbf{Spaces})$  は object ごとの *weak equivalence* を *weak equivalence* に, object ごとの *cofibration* を *cofibration* としてモデル圏になる。

このモデル構造を用いると, 上の Example は

$$F \underset{w}{\simeq} G \not\underset{w}{\Rightarrow} \operatorname{colim} F \underset{w}{\simeq} \operatorname{colim} G$$

である例を与えている。

このように, 小圏  $\mathcal{A}$  に対し関手

$$\text{colim} : \text{Funct}(\mathcal{A}, \mathbf{Spaces}) \longrightarrow \mathbf{Spaces}$$

はホモトピー圏の間の関手

$$\text{Ho}(\text{colim}) : \text{Ho}(\text{Funct}(\mathcal{A}, \mathbf{Spaces})) \longrightarrow \text{Ho}(\mathbf{Spaces})$$

を誘導しない。そこでなるべく  $\text{colim}$  に近い関手でホモトピー圏の間の関手を自然に誘導するものが欲しい。それが Bousfield-Kan の homotopy colimit である。モデル圏の言葉による解説を続けるなら, 以下のようなになる。

**Definition 2.2.6.**  $\mathcal{C}$  と  $\mathcal{D}$  をモデル圏とする。関手

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

は次の二つの条件をみたすとき left Quillen functor と呼ばれる:

1.  $F$  は left adjoint である。
2.  $F$  は cofibration と trivial cofibration を保存する。

**Example 2.2.7.** 小圏  $\mathcal{A}$  に対し

$$\text{colim} : \text{Funct}(\mathcal{A}, \mathbf{Spaces}) \longrightarrow \mathbf{Spaces}$$

は left Quillen functor である。 □

Left Quillen functor に対しては total left derived functor が定義できる。

**Lemma 2.2.8** (Ken Brown's Lemma).  $\mathcal{C}$  と  $\mathcal{D}$  をモデル圏とし, 関手

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

が以下の条件をみたすとする: *cofibrant object* の間の *trivial cofibration*  $f : X \longrightarrow Y$  に対し  $F(f) : F(X) \longrightarrow F(Y)$  は *weak equivalence* になる。

このとき,  $F$  は *weak equivalence* を保つ。よってホモトピー圏の間の関手

$$\text{Ho}(F) : \text{Ho}(\mathcal{C}) \longrightarrow \text{Ho}(\mathcal{D})$$

を誘導する。

**Corollary 2.2.9.**  $\mathcal{C}$  と  $\mathcal{D}$  をモデル圏とし,

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

を left Quillen functor とする。  $\mathcal{C}_c$  を  $\mathcal{C}$  の *cofibrant object* から成る *full subcategory* とすると,  $F$  の  $\mathcal{C}_c$  への制限

$$F|_{\mathcal{C}_c} : \mathcal{C}_c \longrightarrow \mathcal{D}$$

は *weak equivalence* を保つ。よってホモトピー圏の間の

$$\text{Ho}(F) : \text{Ho}(\mathcal{C}_c) \longrightarrow \text{Ho}(\mathcal{D})$$

を誘導する。

**Definition 2.2.10.** モデル圏の間の left Quillen functor

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

に対し, その total left derived functor

$$LF : \text{Ho}(\mathcal{C}) \longrightarrow \text{Ho}(\mathcal{D})$$

を以下の合成で定義する:

$$\text{Ho}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\text{Ho}(Q)} \text{Ho}(\mathcal{C}_c) \xrightarrow{\text{Ho}(F)} \text{Ho}(\mathcal{D})$$

ここで  $Q : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_c$  は  $\mathcal{C}$  の functorial factorization から得られる cofibrant replacement functor である。(Definition 2.1.7 の後のコメント参照。)

そこで

$$\text{colim} : \text{Funct}(\mathcal{X}, \mathbf{Spaces}) \longrightarrow \mathbf{Spaces}$$

の total left derived functor を homotopy colimit と言いたいところなのであるが、実は一般的にホモトピー論で用いられている homotopy colimit はこれではない。

colim の total left derived functor は、もちろん weak equivalence を保つ。しかしながら、このような一般的な定義では実際に扱うのは難しい。というのも、cofibrant replacement  $Q$  が具体的に何をするのが曖昧だからである。Hovey 流のモデル圏の定義では functorial factorization も指定されているので、cofibrant replacement も決まっているはず、である。しかしながら、それが具体的に何になるのかを調べるのは容易ではない。ある圏がモデル圏であることを示すときには、普通は functorial factorization を具体的に構成することはしないからである。

ある特定の morphism の集合を指定し、それらの morphism に対し right lifting property を持つものを fibration、もう一つの morphism の集合を指定し、それからやはり lifting property を用いたある方法で cofibration を定義したとき、適当な条件をみたせばそれでモデル圏になるというのが、Hovey の本 [Hov99] の Theorem 2.1.19 である。このようなモデル圏を cofibrantly generated model category という。ほとんどの重要なモデル圏はこの定理を用いてモデル圏であることが示されているのである。そのため、functorial factorization が具体的に何なのかを調べるのは難しい。

更に、functorial factorization で得られるものは、いわゆる連続写像を fibration または cofibration で取り換える操作で得られるものとは異なるのである。例えば連続写像

$$f : X \longrightarrow Y$$

を cofibration で取り換えるときには、普通は mapping cylinder による分解

$$X \hookrightarrow Y \cup_f X \times I \xrightarrow{p} Y$$

を考える。  $X$  の  $Y \cup_f X \times I$  への inclusion は cofibration であるが、mapping cylinder を底に潰す写像  $p$  は fibration ではない (quasifibration にはなるが)。よって現代的なモデル圏の定義の functorial factorization にはなっていないのである。

このことから、具体的に homotopy colimit を構成するときには、モデル圏としての functorial factorization ではなく mapping cylinder の構成の一般化を考えた方が有用であることが分かる。実際にそれを行なうために、まず simplicial object の定義を思い出そう。

**Definition 2.2.11.** 正の整数  $n$  に対し

$$\mathbf{n} = \{0, 1, \dots, n\}$$

と定義する。これを partially ordered set (poset) とみなし、よって小圏

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \dots \longrightarrow n$$

ともみなす。圏  $\Delta$  を  $\mathbf{n}$  を object とし morphism を order preserving map として定義する。

圏  $\mathcal{C}$  に対し  $\mathcal{C}$  の simplicial object  $F$  とは、contravariant functor

$$F : \Delta \longrightarrow \mathcal{C}$$

のことである。集合の圏での simplicial object を simplicial set といい、これが最も基本的である。同様に simplicial group や simplicial space も定義される。

**Remark 2.2.12.** 任意の  $\Delta$  の morphism、つまり有限順序集合の間の順序を保つ写像は、

$$d^i(k) = \begin{cases} k, & k < i \\ k + 1, & k \geq i \end{cases}$$

$$s^j(k) = \begin{cases} k, & k \leq j \\ k - 1, & k < j \end{cases}$$

で定義される二種類の写像

$$\begin{aligned} d^i &: \mathbf{n} - 1 \longrightarrow \mathbf{n} \quad (0 \leq i \leq n) \\ s^j &: \mathbf{n} + 1 \longrightarrow \mathbf{n} \quad (0 \leq j \leq n) \end{aligned}$$

の合成で表わせることはすぐ分かる。 $d^i$  を face operator,  $s^j$  を degeneracy operator という。そこで simplicial object  $F$  を object の列

$$F_0, F_1, \dots$$

とそれらの間の  $d^i, s^j$  に対応する morphism 達

$$\begin{aligned} d_i &: F_n \longrightarrow F_{n-1} & (0 \leq i \leq n) \\ s_j &: F_n \longrightarrow F_{n+1} & (0 \leq j \leq n) \end{aligned}$$

から成るものである条件をみたまもの、として定義することもできる。そちらの方が一般的かもしれない。このように simplicial object をみなしたとき

$$\begin{array}{ccccc} & & \xleftarrow{d_0} & & \\ & & \xleftarrow{d_1} & & \\ & & \xleftarrow{d_2} & & \\ F_0 & \xleftarrow{d_1} & F_1 & \xleftarrow{d_2} & F_2 \cdots \\ & \xrightarrow{s_0} & & \xrightarrow{s_1} & \\ & & & & \end{array}$$

という図式で表わしたりする。

Simplicial set や simplicial space については、そのデータを合わせて一つの位相空間にすることができる。

**Definition 2.2.13.**  $F$  を simplicial space とする。このとき  $F$  の幾何学的実現 (geometric realization)  $|F|$  を次で定義する:

$$|F| = \left( \coprod_{n \geq 0} \Delta^n \times F(\mathbf{n}) \right) / \sim$$

ただし  $\Delta^n$  は標準的な  $n$  単体

$$\Delta^n = \{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq 1\}$$

であり、関係  $\sim$  は  $\Delta$  の morphism  $\varphi$  に対し

$$(\varphi_*(\mathbf{s}), x) \sim (\mathbf{s}, \varphi^*(x))$$

で定義されたものである。ここで  $\varphi_*$  は  $\varphi$  で与えられる頂点の対応をアフィン写像に拡張してできるものである。

**Example 2.2.14.** Poset  $S$  に対し

$$\mathbf{n} \longmapsto \text{Map}_{\text{Posets}}(\mathbf{n}, S)$$

は simplicial set である。 $S$  が cardinality  $n$  のとき、この simplicial set の幾何学的実現は  $\Delta^{n-1}$  である。  $\square$

**Definition 2.2.15.** 小圏  $\mathcal{X}$  に対し simplicial set  $N_*(\mathcal{X})$  を次で定義する。

$$\begin{aligned} N_n(\mathcal{X}) &= \text{Funct}(\mathbf{n}, \mathcal{X}) \\ &= \{C_0 \xrightarrow{f_1} C_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_n} C_n\} \\ &= \{\mathcal{X} \text{ 中の合成可能な } n \text{ 個の morphism の列}\} \end{aligned}$$

これを小圏  $\mathcal{X}$  の nerve という。この simplicial set の幾何学的実現  $|N_*(\mathcal{X})|$  を  $\mathcal{X}$  の分類空間といい  $|\mathcal{X}|$  や  $B\mathcal{X}$  で表わす。

**Example 2.2.16.**  $\mathcal{P}(\langle n \rangle)$  を  $\langle n \rangle = \{1, \dots, n\}$  の部分集合と包含写像の成す圏とする。  $\mathcal{P}(\langle 1 \rangle)$  は二つの object  $\emptyset$  と  $\{1\}$  と唯一つの (恒等射以外の)morphism  $\emptyset \hookrightarrow \{1\}$  から成る圏である。このとき

$$B\mathcal{P}(\langle 1 \rangle) = [0, 1]$$

である。より一般に

$$B\mathcal{P}(\langle n \rangle) = [0, 1]^n$$

となる。

また,  $\overline{\mathcal{P}}(\langle n \rangle) = \mathcal{P}(\langle n \rangle) - \{\emptyset\}$  とすると

$$\begin{aligned} B\overline{\mathcal{P}}(\langle n \rangle) &= \{(t_1, \dots, t_n) \in I^n \mid \max\{t_1, \dots, t_n\} = 1\} \\ &= I_1^n \end{aligned}$$

である。 □

ホモトピー余極限の構成にはいくつかのアプローチがある。まずは最も基本的な, coequalizer の図式 (2.1) を “cofibrant なもの” で置き換えることによる構成をみよう。

**Definition 2.2.17.** 圏  $\mathcal{X}$  の object  $C$  に対し  $C \downarrow \mathcal{X}$  を  $C$  の下にある  $\mathcal{X}$  の object の圏とする。  $\mathcal{X}$  が小圏のとき関手

$$F : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbf{Spaces}$$

に対し  $F$  の homotopy colimit を次の coequalizer の図式で定義する:

$$\coprod_{f: C \rightarrow D} F(C) \times B(D \downarrow \mathcal{X}) \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi} \\ \xrightarrow{\psi} \end{array} \coprod_{C \in \text{ob}(\mathcal{X})} F(C) \times B(C \downarrow \mathcal{X}) \longrightarrow \text{hocolim } F \quad (2.2)$$

ただし最も左の項の  $f : C \rightarrow D$  に対する成分に対し

$$\begin{aligned} \varphi|_{F(C) \times B(D \downarrow \mathcal{X})} &= F(f) \times 1 \\ \psi|_{F(C) \times B(D \downarrow \mathcal{X})} &= 1 \times B(f^*) \end{aligned}$$

である。

**Remark 2.2.18.** この定義を (2.1) の “cofibrant replacement” と呼んだりする。“replacement” というのは次の事実が成り立つためである:

小圏  $\mathcal{X}$  が initial object を持つとき  $B\mathcal{X}$  は可縮である。また terminal object を持つときも同様である。

証明は §2.3 で行なう。この事実を認めれば  $C \downarrow \mathcal{X}$  は initial object  $1_C : C \rightarrow C$  を持つから  $B(C \downarrow \mathcal{X})$  は可縮になり

$$F(C) \times B(D \downarrow \mathcal{X}) \simeq F(C) \simeq F(C) \times B(C \downarrow \mathcal{X})$$

となる。よって (2.2) は (2.1) の各  $F(C)$  をそれとホモトピー同値なもので置き換えたものになっている。

ホモトピー余極限には simplicial space を用いた記述もある。

**Definition 2.2.19.** 小圏から  $\mathbf{Spaces}$  への covariant functor

$$F : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbf{Spaces}$$

に対し

$$B_q(F) = \coprod_{f \in N_q(\mathcal{X})} F(s_q(f))$$

と定義する。ただし

$$s_q : N_q(\mathcal{X}) \longrightarrow \text{ob}(\mathcal{X})$$

は

$$(C_0 \xrightarrow{f_1} C_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_q} C_q) \longmapsto C_0$$

で与えられる対応である。  
このとき

$$\varphi : \mathbf{p} \longrightarrow \mathbf{q}$$

に対し

$$B_q(F) = \coprod_{C \in \text{ob}(\mathcal{X})} \coprod_{C = s_q(\mathbf{f})} F(C) = \coprod_{C \in \text{ob} \mathcal{X}} F(C) \times s_q^{-1}(C)$$

とみなすことにより

$$\varphi^* : B_q(F) \longrightarrow B_p(F)$$

が以下のように定義される:

$$\coprod_C F(C) \times s_q^{-1}(C) \xrightarrow{\varphi^*} \coprod_C F(C) \times \left( \coprod_{\substack{\mathbf{f} \in s_q^{-1}(C) \\ s_p(\varphi^*(\mathbf{f})) = D}} s_p^{-1}(D) \right) \longrightarrow \coprod_D F(D) \times s_p^{-1}(D)$$

ただし右の写像は  $\mathbf{f} \in s_q^{-1}(C)$  かつ  $s_p(\varphi^*(\mathbf{f})) = D$  であるとき、つまり

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &: C = C_0 \longrightarrow C_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_q \\ \varphi^*(\mathbf{f}) &: D = C_{\varphi(0)} \longrightarrow C_{\varphi(1)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_{\varphi(p)} \end{aligned}$$

のとき、合成

$$C = C_0 \longrightarrow C_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_{\varphi(0)} = D$$

から誘導された写像

$$F(C) \longrightarrow F(D)$$

で与えられるものである。

これで  $B_*(F) = \{B_q(F)\}$  は simplicial space になる。

**Proposition 2.2.20.** この simplicial space の幾何学的実現は (2.2) で定義された  $\text{hocolim } F$  と同相である。

$$\text{hocolim } F \cong |B_*(F)|$$

**Remark 2.2.21.**  $B_*(F)$  を  $F$  の simplicial replacement と言う。

**Example 2.2.22.** Example 2.2.4 を考える。つまり  $\mathcal{X}$  を  $\{1, 2\}$  の proper subset の成す圏とし、covariant functor

$$F : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbf{Spaces}$$

を考える。  $F$  とは図式

$$\begin{array}{ccc} F(\emptyset) & \xrightarrow{f_1} & F(\{1\}) \\ \downarrow f_2 & & \\ & & F(\{2\}) \end{array}$$

のことである。定義より

$$\text{hocolim } F = (\Delta^0 \times F(\emptyset) \amalg \Delta^0 \times F(\{1\}) \amalg \Delta^0 \times F(\{2\}) \amalg \Delta^1 \times F(\emptyset)_{f_1} \amalg \Delta^1 \times F(\emptyset)_{f_2}) / \sim$$

である。ここで  $F(\emptyset)_{f_i}$  と書いたのは、 $\emptyset = s(f_i)$  という意味である。

$\Delta^1 = [0, 1]$  であり、また  $\Delta^0 = \{0\}$  とみなす。すると幾何学的実現の同値関係は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \{0\} \times F(\emptyset)_{f_1} & \text{ と } \Delta^0 \times F(\emptyset) \text{ を同一視} \\ \{0\} \times F(\emptyset)_{f_2} & \text{ と } \Delta^0 \times F(\emptyset) \text{ を同一視} \\ \{1\} \times F(\emptyset)_{f_1} & \text{ と } \Delta^0 \times F(\{1\}) \text{ を } f_1 \text{ で同一視} \\ \{1\} \times F(\emptyset)_{f_2} & \text{ と } \Delta^0 \times F(\{2\}) \text{ を } f_2 \text{ で同一視} \end{aligned}$$

よって

$$\text{hocolim } F = ([-1, 1] \times F(\emptyset) \amalg F(\{1\}) \amalg F(\{2\})) /_{(-1,x) \sim f_1(x), (1,x) \sim f_2(x)}$$

であり、これは  $f_1$  と  $f_2$  の double mapping cylinder である。

Example 2.2.4 の functor  $F$  と  $G$  の場合

$$\begin{aligned} \text{hocolim } F &= [-1, 1] \times S^{n-1} \cup \{-1\} \times D^n \cup \{1\} \times D^n \\ &= \partial([-1, 1] \times D^n) \\ &\cong S^n \\ \text{hocolim } G &= ([-1, 1] \times S^{n-1} \amalg \{-1\} \times * \amalg \{1\} \times *) /_{(-1,x) \sim (-1,*), (1,x) \sim (1,*)} \\ &\cong S^n \end{aligned}$$

となり、共に  $S^n$  となる。 □

Homotopy colimit があれば “co” を取った homotopy limit もある。そのために、まず cosimplicial object の復習をしよう。

**Definition 2.2.23.** 圏  $\mathcal{C}$  に対し  $\mathcal{C}$  の cosimplicial object  $F$  とは、covariant functor

$$F : \Delta \longrightarrow \mathcal{C}$$

のことである。

**Remark 2.2.24.** Remark 2.2.12 のように cosimplicial object  $F$  を object の列

$$F^0, F^1, \dots$$

とそれらの間の  $d^i, s^j$  に対応する morphism 達

$$\begin{aligned} d^i & : F^{n-1} \longrightarrow F^n & (0 \leq i \leq n) \\ s^j & : F^{n+1} \longrightarrow F^n & (0 \leq j \leq n) \end{aligned}$$

の集まりで、ある条件をみたすもの、として定義することもできる。このように cosimplicial object をみなしたときには、やはり

$$\begin{array}{ccccc} & & \xrightarrow{d^0} & & \\ & & \xrightarrow{d^1} & & \\ F^0 & \xrightarrow{d^1} & F^1 & \xrightarrow{d^2} & F^2 \dots \\ & \xleftarrow{s^0} & & \xleftarrow{s^1} & \\ & & & & \end{array}$$

という図式で表わしたりする。

**Example 2.2.25.** 圏  $\Delta$  の morphism

$$\varphi : \mathbf{n} \longrightarrow \mathbf{m}$$

は, 頂点の間の対応をアフィン写像に拡張することにより標準的  $n$  単体から標準的  $m$  単体への写像

$$\varphi_* : \Delta^n \longrightarrow \Delta^m$$

を与える。これにより covariant functor

$$\Delta^* : \Delta \longrightarrow \mathbf{Spaces}$$

が得られる。これは既に simplicial space の幾何学的実現のときに用いている。  $\square$

**Definition 2.2.26.**  $X^*$  を cosimplicial space とする。このとき

$$\mathrm{Tot}(X^*) = \mathrm{Map}_{\mathrm{csSpaces}}(\Delta^*, X^*)$$

と定義し  $X^*$  の totalization という。ここで  $\mathrm{Map}_{\mathrm{csSpaces}}$  は cosimplicial space の圏  $\mathrm{csSpaces}$  での morphism の集合であり,

$$\mathrm{Tot}(X^*) \subset \prod_{n=0}^{\infty} \mathrm{Map}(\Delta^n, X^n)$$

とみなして位相を入れる。ただし, 各  $\mathrm{Map}(\Delta^n, X^n)$  には compact-open topology が入り, 直積の位相は compactly generated なもので取り換えるものとする。

**Example 2.2.27.** 基点付き空間  $X$  に対し

$$\Omega^q(X) = \underbrace{X \times \cdots \times X}_q$$

と定義する。基点の inclusion と対角写像と射影により, cosimplicial space  $\Omega^*(X)$  を得る。これを geometric cobar construction という。このとき同相

$$\mathrm{Tot}(\Omega^* X) \cong \mathrm{Map}_*(I/\partial I, X) = \mathrm{Map}_*(S^1, X) = \Omega X$$

を得る。  $\square$

**Exercise 2.2.28.** 上の同相を確かめよ。

**Exercise 2.2.29.** 位相空間と連続写像の図式

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

に対しその double mapping track  $E_{f,g}$  を

$$E_{f,g} = \{(x, \ell, y) \in X \times \mathrm{Map}(I, Z) \times Y \mid \ell(0) = f(x), \ell(1) = g(y)\}$$

で定義する。

$$\Omega^q(X, Z, Y) = X \times \underbrace{Z \times \cdots \times Z}_q \times Y$$

とおき, 上の Example と同様に  $\Omega^*(X, Z, Y)$  に cosimplicial space の構造を定義するとき同相

$$\mathrm{Tot}(\Omega^*(X, Z, Y)) \cong E_{f,g}$$

があることを確かめよ。  $\Omega^*(X, Z, Y)$  を two-sided geometric cobar construction と言い, Eilenberg-Moore スペクトル系列の構成 [Rec70, Dwy74, Dwy75] などで用いられる。

$$X^{n+1} = \underbrace{X \times \cdots \times X}_{n+1} = \text{Map}(n, X) \text{ であり, contravariant functor}$$

$$\Delta \longrightarrow \mathbf{Spaces}_*$$

つまり simplicial space とみなすのが自然と思うかもしれない。(Example 2.2.14 参照。) しかしながら  $\Omega^* X$  は cosimplicial space として定義している。その理由は  $\Omega^*(X, Z, Y)$  というより一般的な構成の特別な場合 ( $X = *, Y = *$ ) だからである。

**Exercise 2.2.30.** Simplicial space

$$n \longmapsto \text{Map}(n, X)$$

を face および degeneracy operator を用いて

$$\begin{array}{ccccc} & & \xleftarrow{d_0} & & \\ & & \xleftarrow{d_1} & & \\ X & \xleftarrow{d_1} & X^2 & \xleftarrow{d_2} & X^3 \cdots \\ & \xrightarrow{s_0} & & \xrightarrow{s_0} & \\ & & & \xrightarrow{s_1} & \end{array}$$

と表わしたとき、これの左端に  $*$  を追加すると

$$\begin{array}{ccccc} & & \xleftarrow{d_0} & & \\ & & \xleftarrow{d_1} & & \\ * \longleftarrow X & \xleftarrow{d_1} & X^2 & \xleftarrow{d_2} & X^3 \cdots \\ & \xrightarrow{s_0} & & \xrightarrow{s_0} & \\ & & & \xrightarrow{s_1} & \end{array}$$

となる。写像の名前を付け替えると

$$\begin{array}{ccccc} & & \xleftarrow{s^0} & & \\ & & \xleftarrow{s^1} & & \\ * \xleftarrow{s^0} X & \xleftarrow{s^1} & X^2 & \xleftarrow{s^2} & X^3 \cdots \\ & \xrightarrow{d^1} & & \xrightarrow{d^1} & \\ & & & \xrightarrow{d^2} & \end{array}$$

となる。これらの写像が cosimplicial space  $\Omega^*(X)$  の coface operator と codegeneracy operator と一致していることを確かめよ。

よって cosimplicial space  $\Omega^*(X)$  は、これに

$$d^0, d^n : X^{n-1} \longrightarrow X^n$$

を追加したものである。

さて、以上の準備の下にホモトピー極限を定義しよう。

**Definition 2.2.31.** 小圏から  $\mathbf{Spaces}$  への covariant functor

$$F : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbf{Spaces}$$

に対し

$$\Omega^q(F) = \prod_{f \in N_q(\mathcal{X})} F(t_q(f))$$

と定義する。ただし

$$t_q : N_q(\mathcal{X}) \longrightarrow \text{ob}(\mathcal{X})$$

は

$$(C_0 \xrightarrow{f_1} C_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_q} C_q) \longmapsto C_q$$

で与えられる対応である。

$\Omega^*(F) = \{\Omega^q(F)\}$  は、以下のようにして cosimplicial space とみなすことができる。

まず

$$\Omega^q F = \prod_{C \in \text{ob}(\mathcal{X})} \prod_{C=t_q(f)} F(C) = \prod_{C \in \text{ob}(\mathcal{X})} \text{Map}(t_q^{-1}(C), F(C)) \quad (2.3)$$

であることに注意する。

また  $\Delta$  の morphism

$$\varphi : \mathbf{p} \longrightarrow \mathbf{q}$$

と  $(g_D) \in \Omega^p(F)$  に対し、

$$t_q^{-1}(C) \xrightarrow{\varphi^*} \prod_{\substack{f \in t_q^{-1}(C) \\ t_p(\varphi^*(f))=D}} t_n^{-1}(D) \xrightarrow{\text{II } g_D} \prod_{\substack{f \in t_q^{-1}(C) \\ t_p(\varphi^*(f))=D}} F(D) \longrightarrow F(C)$$

を  $C \in \text{ob}(\mathcal{X})$  に関して集めることにより

$$\varphi_* : \Omega^p(F) \longrightarrow \Omega^q(F)$$

を定義する。もちろん最後の写像は  $B_*(F)$  の simplicial space としての記述で用いたものと同じものである。

これで  $\Omega^*(F)$  は cosimplicial space になる。

**Definition 2.2.32.** この cosimplicial space の totalization を

$$\text{holim } F = \text{Tot}(\Omega^*(F))$$

と表わし、 $F$  のホモトピー極限 (homotopy limit) と言う。

**Remark 2.2.33.**  $\Omega^*(F)$  を  $F$  の cosimplicial replacement と言う。

定義では  $\text{holim } F$  は  $\prod_q \text{Map}(\Delta^q, \Omega^q(F))$  の部分空間であるが、これではちょっと扱いづらい。Geometric cobar construction のときのように、より小さい写像空間として表わせると嬉しい。そのために、comma category  $\mathcal{X} \downarrow C$  を考える。(2.3) より、この記号を用いると

$$\Omega^q F = \prod_{C \in \text{ob}(\mathcal{X})} \prod_{f \in N_{q-1}(\mathcal{X} \downarrow C)} F(C)$$

と表わせることに注意する。

**Lemma 2.2.34.** *Covariant functor*

$$F : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbf{Spaces}$$

に対し、homotopy limit は次の equalizer の図式で表わされる。

$$\text{holim } F \longrightarrow \prod_{C \in \text{ob}(\mathcal{X})} \text{Map}(B(\mathcal{X} \downarrow C), F(C)) \xrightarrow[\psi]{\varphi} \prod_{f: C \rightarrow D} \text{Map}(B(\mathcal{X} \downarrow C), F(D))$$

ただし  $\varphi$  と  $\psi$  は、 $f : C \rightarrow D$  の成分への射影が、それぞれ合成

$$\begin{aligned} \prod_{C \in \text{ob}(\mathcal{X})} \text{Map}(B(\mathcal{X} \downarrow C), F(C)) &\xrightarrow{p_C} \text{Map}(B(\mathcal{X} \downarrow C), F(C)) \xrightarrow{F(C)_*} \text{Map}(B(\mathcal{X} \downarrow C), F(D)) \\ \prod_{C \in \text{ob}(\mathcal{X})} \text{Map}(B(\mathcal{X} \downarrow C), F(C)) &\xrightarrow{p_D} \text{Map}(B(\mathcal{X} \downarrow D), F(D)) \xrightarrow{(\mathcal{X} \downarrow f)^*} \text{Map}(B(\mathcal{X} \downarrow C), F(D)) \end{aligned}$$

で与えられる写像である。よって

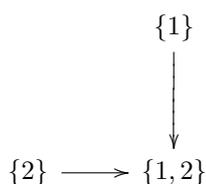
$$\text{holim } F = \left\{ (f_C)_{C \in \text{ob}(\mathcal{X})} \in \prod \text{Map}(B(\mathcal{X} \downarrow C), F(C)) \mid \text{natural with respect to } C \right\}$$

である。

**Exercise 2.2.35.** この Lemma を確かめよ。

**Remark 2.2.36.** (2.2) や上の Lemma から分かるように、ホモトピー (余) 極限を定義するためには、“ $B(C \downarrow \mathcal{X})$  をかける” 操作や “ $B(\mathcal{X} \downarrow C)$  を定義域とする mapping space” を作る操作ができる圏であればよい。よって位相空間の圏 (CW 複体の圏) で enrich された圏ならよい。また小圏の分類空間は simplicial set の幾何学的実現で与えられていたことを思い出すと, simplicial model category (morphism の集合を simplicial set に拡張できるモデル圏, [Hir03] の Chapter 9 参照) でも定義できることが分かる。更に, EKMM の意味の spectrum のモデル圏 [EKMM97] においても空間との smash product を取ったり, 空間からの mapping spectrum を作ったりできることからホモトピー (余) 極限が定義できる。一般のモデル圏でのホモトピー (余) 極限については, Hirschhorn の本 [Hir03] の Chapter 18, 19 の議論をみるとよい。

**Example 2.2.37.**  $\mathcal{X}$  を  $\{1, 2\}$  の空でない部分集合のなす圏とする。



連続写像

$$f : X \longrightarrow Y$$

と  $y_0 \in Y$  に対し

$$\begin{aligned} F(\{1\}) &= \{y_0\} \\ F(\{2\}) &= X \\ F(\{1, 2\}) &= Y \\ F(\{2\} \hookrightarrow \{1, 2\}) &= f \end{aligned}$$

により

$$F : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbf{Spaces}$$

を定義する。上の Lemma を用いてこの functor のホモトピー極限を求めよう。まず

$$\begin{aligned} B(\mathcal{X} \downarrow \{1\}) &= B\{1\} = \{*\} \\ B(\mathcal{X} \downarrow \{2\}) &= B\{2\} = \{*\} \\ B(\mathcal{X} \downarrow \{1, 2\}) &= B\mathcal{X} = [-1, 1] \cong [0, 1] \end{aligned}$$

である。

よって

$$\mathrm{holim} F \subset \mathrm{Map}(B(\mathcal{X} \downarrow \{1\}), \{y_0\}) \times \mathrm{Map}(B(\mathcal{X} \downarrow \{2\}), X) \times \mathrm{Map}(B(\mathcal{X} \downarrow \{1, 2\}), Y)$$

とみなしたとき,  $(f_{\{1\}}, f_{\{2\}}, f_{\{1, 2\}}) \in \mathrm{holim} F$  であるための条件は次の図式が可換になることである。

$$\begin{array}{ccccc} \{0\} & \longrightarrow & I & \longleftarrow & \{1\} \\ f_{\{1\}} \downarrow & & f_{\{1, 2\}} \downarrow & & \downarrow f_{\{2\}} \\ y_0 & \longrightarrow & Y & \longleftarrow & X \end{array}$$

一点集合  $\{1\}$  から  $X$  への連続写像とは  $X$  の点を一つ決めることに他ならないから, 結局  $\mathrm{holim} F$  は以下のような  $\mathrm{Map}(I, Y) \times X$  の部分空間となる。

$$\mathrm{holim} F = \{(f_{\{1, 2\}}, x) \in \mathrm{Map}(I, Y) \times X \mid f_{\{1, 2\}}(0) = y_0, f_{\{1, 2\}}(1) = f(x)\}$$

これは Definition 1.2.1 で定義された  $f$  の  $y_0$  上のホモトピーファイバー  $\mathrm{hofiber}(f)_{y_0}$  である。 □

ホモトピー極限などのように cosimplicial space の Tot で表わされる空間のホモトピー群の性質を調べる際には、次のスペクトル系列が有効である。

**Theorem 2.2.38.** 各  $X^q$  が単連結である基点付き cosimplicial space  $X^*$  が fibrant であるとき、次のスペクトル系列が存在する。

$$E_{-s,t}^2 \cong H^s(N\pi_t(X^*)) \implies \lim_n \pi_{t-s}(\text{Tot}_n(X^*))$$

ただし収束は conditional convergence ([Boa99]) である。また  $N$  は cosimplicial Abelian group の normalized cochain complex である。

**Remark 2.2.39.** ここでは全てアーベル群で考えるため各  $X^q$  が単連結であると仮定した。このスペクトル系列の構成のためには、この仮定は本質的ではない。

Boardman のスペクトル系列の収束に関する理論 [Boa99] から  $\lim^1_r Z^r = 0$  ならば、このスペクトル系列は強収束する。またそのとき

$$\lim_n^1 \pi_*(\text{Tot}_n(X^*)) = 0$$

であることも従う。よって

$$\lim_n \pi_*(\text{Tot}_n(X^*)) \cong \pi_*(\text{Tot}(X^*))$$

となり強収束するスペクトル系列

$$E_{-s,t}^2 = H^s(N\pi_t(X^*)) \implies \pi_{t-s}(\text{Tot}(X^*))$$

が得られる。

ホモトピー極限の場合、恒等射以外で合成可能な morphism の最大数により  $E^1$ -term の vertical vanishing line が得られる。

**Lemma 2.2.40.** 基点付き空間の図式

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow (\mathbf{Spaces} \downarrow B)_*$$

について、 $\mathcal{C}$  の合成可能な  $n$  個 morphism の列

$$C_0 \xrightarrow{f_1} C_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_n} C_n$$

には必ず恒等射が含まれるとする。このとき  $F$  のホモトピー極限のホモトピースペクトル系列について、 $s \geq n$  に対し

$$E_{-s,t}^1 = 0$$

となる。よってこのスペクトル系列は強収束する。

*Proof.*  $\Omega^*F$  を  $F$  のホモトピー極限を定義するときの cosimplicial space とする。定義より

$$(\Omega^*F)^s = \prod_{\alpha \in \text{ob}(\mathcal{C})} \text{Map}(t_s^{-1}(\alpha), F(\alpha))$$

である。よって

$$\pi_t((\Omega^*F)^s) = \prod_{\alpha \in \text{ob}(\mathcal{C})} \text{Map}(t_s^{-1}(\alpha), \pi_t(F(\alpha)))$$

である。 $(t_s^{-1}(\alpha))$  は discrete set。)

また

$$E_{-s,t}^1 = N^s \pi_t(\Omega^*F) = \bigcap_{j=0}^{s-1} \text{Ker } s^j \quad (2.4)$$

であり,  $s^j$  は

$$g_\alpha : t_s^{-1}(\alpha) \longrightarrow \pi_t(F(\alpha))$$

達に対し

$$t_{s-1}^{-1}(\alpha) \xrightarrow{(s^j)^*} t_s^{-1}(\alpha) \xrightarrow{g_\alpha} \pi_t(F(\alpha))$$

達を対応させることで与えられている。仮定より  $s \geq n$  なら  $t_s^{-1}(\alpha)$  の中に必ず恒等射が含まれ  $(s^j)^*$  は恒等射を挿入する写像であるから

$$t_s^{-1}(\alpha) = \bigcup_{j=0}^{s-1} \text{Im}(s^j)^*$$

となる。(2.4) より  $(g_\alpha) \in N^s \pi_t(\Omega^* F) = E_{-s,t}^1$  ならば全ての  $j$  に対し

$$g_\alpha|_{\text{Im}(s^j)^*} = 0$$

であるから, 以上のことより

$$g_\alpha = 0$$

となる。□

ここで, この講義で用いるホモトピー (余) 極限に関する次の性質をまとめておこう。まず極限どうしの可換性について。

**Lemma 2.2.41.** ホモトピー (余) 極限について次が成り立つ。

1.  $\text{holim}$  と  $\text{hocolim}$  は可換。
2.  $\mathcal{C}$  が  $BC$  が有限複体になる小圏ならば

$$\text{hocolim}_i \text{holim}_{\mathcal{C}} F \simeq \text{holim}_{\mathcal{C}} \text{hocolim}_i F$$

である。ここで  $\text{hocolim}_i$  は *sequential homotopy colimit* である。

3.  $\text{hocolim}$  と  $\text{hocolim}$  は可換。

複雑なホモトピー極限を調べるときは次の Covering Lemma が有効である。

**Theorem 2.2.42** (Covering Lemma).  $\mathcal{C}$  をホモトピー極限を持つモデル圏,  $\mathcal{X}$  を小圏とし  $\mathcal{X}_1$  と  $\mathcal{X}_2$  をその部分圏とする。もし *nerve* について

$$N(\mathcal{X}) = N(\mathcal{X}_1) \cup N(\mathcal{X}_2)$$

が成り立つなら

$$F : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{C}$$

に対し, 部分圏の包含により誘導される次の図式は *Cartesian diagram* である。

$$\begin{array}{ccc} \text{holim } F & \longrightarrow & \text{holim } F|_{\mathcal{X}_1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{holim } F|_{\mathcal{X}_2} & \longrightarrow & \text{holim } F|_{\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2} \end{array}$$

Cartesian diagram の定義は Definition 3.2.8 を参照のこと。

もちろん, 2 個ではなく一般に  $n$  個の部分圏に分ける場合も考えられる。

**Theorem 2.2.43** (Covering Lemma).  $\mathcal{C}$  をホモトピー極限を持つモデル圏,  $\mathcal{X}$  を小圏とし  $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$  をその部分圏で以下の条件をみたすものとする:

1.  $N(\mathcal{X}) = \cup_{i=1}^n N(\mathcal{X}_i)$
2. 任意の  $K \subset \langle n \rangle$  に対し

$$N\left(\bigcup_{i \in K} \mathcal{X}_i\right) = \bigcup_{i \in K} N(\mathcal{X}_i)$$

このとき

$$F : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{C}$$

に対し

$$Z_F(K) = \begin{cases} \text{holim}(F|_{\cap_{i \in K} \mathcal{X}_i}), & K \neq \emptyset \\ \text{holim } F, & K = \emptyset \end{cases}$$

とおくと  $Z_F$  は Cartesian  $n$ -cube である。

*Sketch of Proof.*  $n$  に関する帰納法。  $n = 2$  のときは  $\text{holim } F$  を

$$\text{holim } F = \left\{ (f_C)_{C \in \text{ob}(\mathcal{X})} \left| \begin{array}{ccc} |\mathcal{X} \downarrow C| & \longrightarrow & F(C) \\ \downarrow & & \downarrow \\ |\mathcal{X} \downarrow D| & \longrightarrow & F(D) \end{array} \right. \right\}$$

と表わし、条件を用いて図式

$$\begin{array}{ccc} \text{holim } F & \longrightarrow & \text{holim } F|_{\mathcal{X}_1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{holim } F|_{\mathcal{X}_2} & \longrightarrow & \text{holim } F|_{\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2} \end{array}$$

が pull-back diagram であることを確かめる。このとき写像は全て fibration なので、この図式は Cartesian であることが分かる。

一般の  $n$  について示すために帰納法を用いるときには  $(n+1)$ -cube を  $n$ -cube から  $n$ -cube への morphism とみなせばよい。  $\square$

さて、ホモトピー (余) 極限を導入する動機となったホモトピー不変性についてであるが、ある程度一般的なモデル圏で議論しようとする、Definition 2.2.10 の後のコメントからも分かるように、(co)fibrant なものに制限しないとけない。とりあえず結果を書く以下ようになる。

**Theorem 2.2.44** ([Hir03] の Theorem 18.5.3).  $\mathcal{X}$  を小圏とし、 $\mathcal{C}$  を *simplicial model category* とする。 $\mathcal{C}$  の中の  $\mathcal{X}$ -diagram

$$F, G : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{C}$$

が、各 object  $C \in \text{ob}(\mathcal{X})$  に対し  $F(C)$  も  $G(C)$  も cofibrant であるとする。自然変換

$$\varphi : F \longrightarrow G$$

が、各 object について弱同値

$$\varphi(C) : F(C) \xrightarrow{\cong} G(C)$$

であるものなら

$$\text{hocolim } \varphi : \text{hocolim } F \longrightarrow \text{hocolim } G$$

は弱同値である。

同様に  $F, G$  が各  $object$  に対し  $F(C)$  も  $G(C)$  も  $fibrant$  であり,  $\varphi$  が各  $object$  に対し弱同値なら

$$\operatorname{holim} \varphi : \operatorname{holim} F \longrightarrow \operatorname{holim} G$$

は弱同値になる。

我々の考えているのは  $\mathcal{C}$  が位相空間の圏である場合であるが, このとき全ての  $object$  は  $fibrant$  であることに注意する (Example 2.1.9 参照)。よってホモトピー極限については次を得る。

**Corollary 2.2.45.**  $\mathcal{X}$  を小圏とし位相空間の  $\mathcal{X}$ -*diagram*

$$F, G : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbf{Spaces}$$

の間に  $object$  ごとに弱ホモトピー同値である自然変換

$$\varphi : F \longrightarrow G$$

があるとすると

$$\operatorname{holim} \varphi : \operatorname{holim} F \longrightarrow \operatorname{holim} G$$

は弱ホモトピー同値になる。

ホモトピー余極限については, モデル構造に注意しなければならない。まず Strøm のモデル構造で考えれば全ての  $object$  は  $cofibrant$  であるから次が分かる。

**Corollary 2.2.46.**  $\mathcal{X}$  を小圏とし位相空間の  $\mathcal{X}$ -*diagram*

$$F, G : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbf{Spaces}$$

の間に  $object$  ごとにホモトピー同値である自然変換

$$\varphi : F \longrightarrow G$$

があるとすると

$$\operatorname{hocolim} \varphi : \operatorname{hocolim} F \longrightarrow \operatorname{hocolim} G$$

はホモトピー同値になる。

もちろん, 基点付き位相空間の圏で考える場合は  $cofibrant$ , つまり基点が  $nondegenerate$  である, という条件を付けなければならない。

一方, 弱ホモトピー同値不変性を考えるときには Quillen のモデル構造を考えなければならず, 上の Theorem を用いるときには  $cofibrant$  な  $object$  に制限しないといけない。ところが, 位相空間の圏に限れば  $cofibrant$  の条件が要らないことが Dugger と Isaksen の [DI] の Appendix A で示されている。彼等は Strøm のモデル構造との比較により証明している。

**Theorem 2.2.47.**  $\mathcal{X}$  を小圏とし位相空間の  $\mathcal{X}$ -*diagram*

$$F, G : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbf{Spaces}$$

の間に  $object$  ごとに弱ホモトピー同値である自然変換

$$\varphi : F \longrightarrow G$$

があるとすると

$$\operatorname{hocolim} \varphi : \operatorname{holim} F \longrightarrow \operatorname{hocolim} G$$

は弱ホモトピー同値になる。

この節の最後としてホモトピー (余) 極限などについての参考文献を挙げておく。

まず simplicial set については, [DH01] にある Dwyer の解説が, その単体複体との関係まで含めて書いてあり初学者には分り易い, と思う。もちろん, simplicial set についての最も有名な教科書は May の [May92] であるが。他には Curtis の [Cur71] という survey もある。新しいのは Goerss-Jardine の [GJ99] であるが, 初学者にはとっつきにくいと思う。

ホモトピー余極限については, やはり [DH01] の Dwyer の解説が非常に分り易い。Madsen と Weiss の論文 [MW] の Appendix D も参考になる。ホモトピー不変性のところで挙げた Dugger と Isaksen の [DI] も一読に値する。

ホモトピー極限については, Goodwillie の [Goo92] がよいだろう。

もちろん, ホモトピー (余) 極限のオリジナルの文献は Bousfield と Kan の本 [BK72] である。ホモトピー (余) 極限のモデル圏的な扱いについてやその性質については, 何度も挙げているが, [Hir03] がよいだろう。

## 2.3 圏の分類空間について

ホモトピー極限やホモトピー余極限は圏の分類空間を用いて定義されている。よって, それらを扱う際には圏の分類空間の基本的な性質に慣れ親しんでおく必要がある。この section では, 関手の微積分を行なうために必要な圏の分類空間に関する事項をまとめた。

圏を扱うためには, まずは関手について調べておく必要がある。以下, 特に断らない限り関手はすべて共変関手とする。

**Lemma 2.3.1.** 小圏の間の関手

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

に対し, *simplicial set* の写像

$$N_*F : N_*(\mathcal{C}) \longrightarrow N_*(\mathcal{D})$$

が誘導され, よって連続写像

$$BF : B\mathcal{C} \longrightarrow B\mathcal{D}$$

が得られる。

つまり分類空間を取る操作は, 小圏の圏から位相空間の圏への共変関手である。

**Lemma 2.3.2.**  $F_0, F_1 : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$  を小圏の間の関手とする。自然変換

$$\varphi : F_0 \longrightarrow F_1$$

が存在するならば

$$BF_0 \simeq BF_1$$

である。

この Lemma の証明のために, 次の事実が必要になる。

**Lemma 2.3.3.** 小圏  $\mathcal{C}$  と  $\mathcal{D}$  に対し, 射影は自然な同相

$$B(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) \cong B\mathcal{C} \times B\mathcal{D}$$

を誘導する。

*Proof of Lemma 2.3.2.* 関手

$$H : \mathcal{C} \times \mathcal{P}(\langle 1 \rangle) \longrightarrow \mathcal{D}$$

を次で定義する: まず object に対しては  $\text{ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{P}(\langle 1 \rangle)) = \text{ob}(\mathcal{C} \times \emptyset) \amalg \text{ob}(\mathcal{C} \times \{1\})$  であることから

$$\begin{aligned} H|_{\mathcal{C} \times \emptyset} &= F_0 \\ H|_{\mathcal{C} \times \{1\}} &= F_1 \end{aligned}$$

で定義する。これで morphism についても,  $\mathcal{C} \times \emptyset$  の morphism と  $\mathcal{C} \times \{1\}$  の morphism に対しては定義された。 $f \times g = (f \times 1) \circ (1 \times g)$  であることから, あとは  $\mathcal{C}$  の object  $C$  に対し  $1_C \times (\emptyset \hookrightarrow \langle 1 \rangle)$  という morphism に対して決めればよいが, それは

$$H(1_C \times (\emptyset \hookrightarrow \langle 1 \rangle)) : H(\mathcal{C} \times \emptyset) = F_0(\mathcal{C}) \xrightarrow{\varphi_C} F_1(\mathcal{C}) = H(\mathcal{C} \times \langle 1 \rangle)$$

でよい。

この関手から連続写像

$$BH : B(\mathcal{C} \times \mathcal{P}(\langle 1 \rangle)) \longrightarrow BD$$

が得られるが, 上の Lemma と Example 2.2.16 より

$$B(\mathcal{C} \times \mathcal{P}(\langle 1 \rangle)) \cong B(\mathcal{C}) \times B(\mathcal{P}(\langle 1 \rangle)) \cong B(\mathcal{C}) \times [0, 1]$$

となり,  $BH$  が求めるホモトピーであることが分かる。□

**Corollary 2.3.4.**  $\mathcal{C}$  が initial object または terminal object を持つ小圏ならば

$$BC \simeq *$$

である。

*Proof.*  $*$  を object も morphism も唯一つの圏とする。 $\mathcal{C}$  が initial object または terminal object  $C_0$  を持つとすると, 関手

$$F : * \longrightarrow \mathcal{C}$$

が  $F(*) = C_0$  により定義される。また unique な関手

$$G : \mathcal{C} \longrightarrow *$$

がある。このとき

$$G \circ F = 1_*$$

である。また

$$F \circ G(C) = C_0$$

であるが,  $C_0$  が initial object のときは, unique な morphism

$$C_0 \longrightarrow C$$

により自然変換

$$F \circ G \longrightarrow 1_C$$

が定義される。よって Lemma 2.3.2 より

$$BF \circ BG \simeq B1_C = 1_{BC}$$

となり

$$BC \simeq B* = \{*\}$$

である。

$C_0$  が terminal object のときは自然変換

$$1_C \longrightarrow F \circ G$$

が定義されることから分かる。□

このことから, 次が分かる。

**Lemma 2.3.5.**  $\mathcal{C}$  を *initial object*  $C_0$  を持つ小圏とする。関手

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Spaces}$$

に対し、定義域の圏の制限により与えられる写像

$$\mathrm{holim} F \longrightarrow \mathrm{holim} F|_{C_0} = F(C_0) = \lim F$$

はホモトピー同値である。

*Proof.* Lemma 2.2.34 より、

$$\mathrm{holim} F = \left\{ (f_C)_{C \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})} \in \prod \mathrm{Map}(B(\mathcal{C} \downarrow C), F(C)) \mid \text{natural with respect to } C \right\}$$

であり、一方

$$\mathrm{holim} F|_{C_0} = \{f_{C_0} : B(\{C_0\}) \longrightarrow F(C_0)\} = F(C_0)$$

である。 $\mathcal{C} \downarrow C$  は initial object  $C_0 \longrightarrow C$  を持つので、Corollary 2.3.4 より

$$B(\mathcal{C} \downarrow C) \simeq *$$

である。またこのホモトピー同値は  $C$  に関し natural であり、よって

$$\begin{aligned} \mathrm{holim} F &\simeq \left\{ (f_C)_{C \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})} \mid \begin{array}{ccc} F(C) & \longrightarrow & F(C') \\ & \swarrow & \nearrow \\ & * & \end{array} \right\} \\ &= \lim F \\ &= F(C_0) \end{aligned}$$

である。 □

同様に次を得る。

**Lemma 2.3.6.**  $\mathcal{C}$  を *terminal object*  $C_0$  を持つ小圏とする。関手

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Spaces}$$

に対し、 $C_0$  への定値関手  $\mathcal{C} \longrightarrow \{C_0\}$  を合成することにより与えられる写像

$$\mathrm{colim} F = F(C_0) = \mathrm{hocolim} F(C_0) \longrightarrow \mathrm{hocolim} F$$

はホモトピー同値である。

Bousfield-Kan はより一般に関手

$$\begin{aligned} \varphi &: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \\ F &: \mathcal{B} \longrightarrow \mathbf{Spaces} \end{aligned}$$

に対し

$$\mathrm{holim} F \longrightarrow \mathrm{holim} F \circ \varphi$$

が弱同値になる条件を調べている。Bousfield-Kan は *left cofinality* と呼んでいるが、Hirschhorn [Hir03] は *homotopy left cofinality* と呼んでいる。Hirschhorn が述べているように、“left cofinality” という言葉は通常 of 極限のための条件に用いた方がよいと思うので、ここでは Hirschhorn の用語に従うことにする。

**Definition 2.3.7.**  $\mathcal{A}$  と  $\mathcal{B}$  を小圏とし

$$\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

を関手とする。任意の  $\mathcal{B}$  の object  $b$  に対し  $B(\varphi \downarrow b)$  が可縮であるとき  $F$  は homotopy left cofinal であるという。ただし  $\varphi \downarrow b$  は pair  $(a, \varphi(a) \rightarrow b)$  を object とする圏である。

また, 任意の  $\mathcal{B}$  の object  $b$  に対し  $B(b \downarrow \varphi)$  が可縮であるとき homotopy right cofinal という。ただし  $b \downarrow \varphi$  は pair  $(a, b \rightarrow \varphi(a))$  を object とする圏である。

**Theorem 2.3.8.**  $\mathcal{A}$  と  $\mathcal{B}$  を小圏とし

$$\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

を homotopy left cofinal な関手とする。すると, 任意の関手

$$F : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbf{Spaces}$$

に対し弱ホモトピー同値

$$\mathrm{holim} F \xrightarrow{\simeq} \mathrm{holim} F \circ \varphi$$

がある。

**Remark 2.3.9.** ホモトピー (余) 極限の弱同値不変性の議論 (Theorem 2.2.44) から想像できるように, この定理を一般のモデル圏で考えようとする,  $F$  が objectwise fibrant である, という条件が必要になる。ホモトピー余極限の場合には, もちろん objectwise cofibrant でないといけない。詳しくは [Hir03] の §19.6 を見るとよい。

さて, 圏の分類空間が古典的な分類空間の一般化になっていることはすぐ分かる。古典的な分類空間の構成にはいくつかのものがあるが, Milgram による geometric bar construction [Mil67] とその一般化 [May75] が最も良い性質を持つ。

**Definition 2.3.10.**  $G$  を topological monoid とし  $X$  と  $Y$  を  $G$  がそれぞれ右および左から作用する空間とする。

$$B_n(X, G, Y) = X \times G^n \times Y$$

とし,  $G$  の積と作用, そして単位元の inclusion で simplicial space  $B_*(X, G, Y)$  にする。これを two-sided bar construction という。

$$EG = |B_n(*, G, G)|$$

$$BG = |B_n(*, G, *)|$$

と書く。  $BG$  を  $G$  の分類空間という。

**Lemma 2.3.11.** 群  $G$  を object が一つ, morphism の集合が  $G$ , 合成が  $G$  の積で与えられる圏  $\mathcal{C}_G$  と同一視すると, その分類空間  $BC_G$  は two-sided bar construction による群の分類空間  $BG$  の定義と一致する。



# Chapter 3

## ホモトピー切除定理

### 3.1 古典的なホモトピー切除定理

ホモロジー群の公理の一つである切除同型は、ホモトピー群では一般には成り立たない。Blakers と Massey は [BM51, BM52, BM53] においてホモトピー群の切除同型を研究し、空間の連結性が十分高いとき、ある次数まではホモトピー群に対し切除同型が成り立つことを証明した。

ホモロジー群に対する切除同型は、CW 複体  $X$  とその部分複体  $A, B$  で  $X = A \cup B$  であるものに対し、包含写像から誘導される写像が同型

$$H_n(B, A \cap B) \xrightarrow{\cong} H_n(X, A)$$

であるというものである。

この状況を以下の図式で考えよう。

$$\begin{array}{ccc} A \cap B & \longrightarrow & A \\ \downarrow i_{A \cap B} & & \downarrow i_A \\ B & \longrightarrow & X \end{array} \quad (3.1)$$

$X = A \cup B$  という仮定は

$$X = \operatorname{colim} \left( \begin{array}{ccc} A \cap B & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \\ B & & \end{array} \right)$$

ということである。

一般に対のホモロジー群について

$$\begin{aligned} H_n(B, A \cap B) &\cong \tilde{H}_n(\operatorname{hocofiber}(i_{A \cap B})) \\ H_n(X, A) &\cong \tilde{H}_n(\operatorname{hocofiber}(i_A)) \end{aligned}$$

であるが、包含写像

$$\begin{aligned} i_{A \cap B} &: A \cap B \hookrightarrow B \\ i_A &: A \hookrightarrow X \end{aligned}$$

は共に部分複体の包含写像であり cofibration である。よって homotopy cofiber と cofiber がホモトピー同値になり

$$\begin{aligned} H_n(B, A \cap B) &\cong \tilde{H}_n(B/A \cap B) \\ H_n(X, A) &\cong \tilde{H}_n(X/A) \end{aligned}$$

となる。仮定から、上の図式は push-out diagram であり cofiber を保つ。よって

$$H_n(B, A \cap B) \cong \tilde{H}_n(B/A \cap B) \cong \tilde{H}_n(X/A) \cong H_n(X, A)$$

となる。

対のホモトピー群については

$$\begin{aligned}\pi_n(B, A \cap B) &= \pi_{n-1}(\text{hofiber}(i_{A \cap B})) \\ \pi_n(X, A) &= \pi_{n-1}(\text{hofiber}(i_A))\end{aligned}$$

であり、ホモトピー群に対する切除同型を考えるということは  $i_{A \cap B}$  と  $i_A$  の homotopy fiber を比較することに他ならない。一般に次の事実がある。

**Lemma 3.1.1.** 空間のホモトピー可換な図式

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \varphi \downarrow & & \downarrow g \\ C & \xrightarrow{\psi} & D \end{array}$$

は、次のホモトピー可換な図式に拡張できる:

$$\begin{array}{ccccc} T & \longrightarrow & \text{hofiber}(\varphi) & \longrightarrow & \text{hofiber}(g) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{hofiber}(f) & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow & & \downarrow \varphi & & \downarrow g \\ \text{hofiber}(\psi) & \longrightarrow & C & \xrightarrow{\psi} & D \end{array}$$

ここで縦横の列は全て *homotopy fiber sequence* である。

**Exercise 3.1.2.** この Lemma を証明せよ。

この Lemma から、図式 (3.1) において  $T \underset{w}{\simeq} *$  なら

$$\text{hofiber}(i_{A \cap B}) \underset{w}{\simeq} \text{hofiber}(i_A)$$

となり、ホモトピー群に対し切除同型が成り立つ。もちろん、一般には  $T \underset{w}{\simeq} *$  ではないが、 $T$  の連結性が十分高いときには低い次元のホモトピー群で切除同型が成り立つことが分かる。

より正確には、Blakers-Massey は次を証明した。

**Theorem 3.1.3.** 可換図式

$$\begin{array}{ccc} X(\emptyset) & \longrightarrow & X(\{1\}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X(\{2\}) & \longrightarrow & X(\{1, 2\}) \end{array}$$

で以下の条件をみたすものを考える:

1.  $X(\{1, 2\}) \underset{w}{\simeq} \text{hocolim}(X(\{1\}) \longleftarrow X(\emptyset) \longrightarrow X(\{2\}))$
2.  $X(\emptyset) \longrightarrow X(\{1\})$  は  $k_1$  連結

3.  $X(\emptyset) \rightarrow X(\{2\})$  は  $k_2$  連結

このとき

$$X(\emptyset) \rightarrow \operatorname{holim} \left( \begin{array}{ccc} & & X(\{1\}) \\ & & \downarrow \\ X(\{2\}) & \longrightarrow & X(\{1, 2\}) \end{array} \right)$$

は  $(k_1 + k_2 - 1)$  連結である。

ここで写像の連結性とは以下で定義されるものである。

**Definition 3.1.4.** 連続写像  $f: X \rightarrow Y$  が  $k$  連結とは  $\operatorname{hofiber}(f)$  が  $(k - 1)$  連結であることと定義する。

この Blakers-Massey の定理は、何人かにより一般化されてきた。これについては次節で詳しく扱う。

## 3.2 空間の立方体的図式

前節のホモトピー切除定理の状況を一般化し、 $X$  の部分空間  $A_1, \dots, A_n$  が与えられたとしよう。Example 2.2.16 で現れた記号  $\langle n \rangle = \{1, \dots, n\}$  を用いて、 $S \subset \mathbf{n}$  に対し

$$X_S = \bigcap_{i \notin S} A_i$$

とおく。すると包含写像  $S_1 \hookrightarrow S_2$  は自然に包含写像

$$X_{S_1} \hookrightarrow X_{S_2}$$

を誘導する。つまり  $\langle n \rangle$  の部分集合と包含写像の成す圏から位相空間の圏への関手が得られる。

**Definition 3.2.1.** 集合  $S$  に対し

$$\mathcal{P}(S) = S \text{ の部分集合と包含写像の成す圏}$$

とする。

空間の  $n$ -cube とは、共変関手

$$X: \mathcal{P}(\langle n \rangle) \rightarrow \mathbf{Spaces}$$

のことで定義する。

Blakers-Massey の定理で考えたのは、空間の 2-cube  $X$  に対しその右下の頂点を抜いた図式のホモトピー余極限が右下と弱同値なとき、その左上の頂点を抜いた図式のホモトピー極限の連結性だった。一般の  $n$ -cube でも、その二つの頂点を抜いた図式は重要である。

**Definition 3.2.2.** 空間の  $n$ -cube  $X$  に対し

$$\begin{aligned} h_0(X) &= \operatorname{holim}_{\emptyset \neq K \in \mathcal{P}(\langle n \rangle)} X(K) \\ h_1(X) &= \operatorname{hocolim}_{\langle n \rangle \neq K \in \mathcal{P}(\langle n \rangle)} X(K) \end{aligned}$$

と定義する。

これらの頂点を除かない図式については、Lemma 2.3.5 と Lemma 2.3.6 により次のようになる。

**Lemma 3.2.3.** 空間の  $n$ -cube  $X$  に対し

$$\begin{aligned}\operatorname{holim} X &\simeq X(\emptyset) \\ \operatorname{hocolim} X &\simeq X(\langle n \rangle)\end{aligned}$$

である。

**Definition 3.2.4.** 空間の  $n$ -cube  $X$  に対し, 写像

$$a(X) : X(\emptyset) \longrightarrow h_0(X)$$

を次で定義する:

$$X(\emptyset) = \lim X \simeq \operatorname{holim} X \longrightarrow \operatorname{holim}_{K \neq \emptyset} X(K) = h_0(X)$$

$a(X)$  の homotopy fiber を  $\tilde{f}X$  と表わし,  $X$  の total homotopy fiber という。

**Remark 3.2.5.** 一般に, (discrete な) 小圏  $\mathcal{C}$  とその部分圏  $\mathcal{D}$  が与えられたとき,

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Spaces}$$

に対し

$$\operatorname{holim} F \longrightarrow \operatorname{holim} F|_{\mathcal{D}}$$

は fibration になる。よって  $\tilde{f}X$  は

$$\operatorname{holim} X \longrightarrow \operatorname{holim}_{K \neq \emptyset} X$$

の本当のファイバーとホモトピー同値である。

$\tilde{f}X$  にはいくつかの記述がある。

**Lemma 3.2.6.** *Example 2.2.16* より,  $\overline{\mathcal{P}}(\langle n \rangle) = \mathcal{P}(\langle n \rangle) - \{\emptyset\}$  とすると

$$\begin{aligned}B\overline{\mathcal{P}}(\langle n \rangle) &= \{(t_1, \dots, t_n) \in I^n \mid \max\{t_1, \dots, t_n\} = 1\} \\ &= I_1^n\end{aligned}$$

である。すると

$$\begin{aligned}\tilde{f}X &= \{(x, \omega) \in X(\emptyset) \times \operatorname{Map}(I, h_0(X)) \mid \omega(0) = a(x), \omega(1) = *\} \\ &= \left\{ (x; \omega_K)_{K \in \operatorname{ob}(\overline{\mathcal{P}}(\langle n \rangle))} \left| \begin{array}{ccc} I_1^{|K|} & \xrightarrow{\omega_K(t)} & X(K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ I_1^{|L|} & \xrightarrow{\omega_L(t)} & X(L) \end{array} \right. \right\}\end{aligned}$$

である。

**Lemma 3.2.7.** 空間の  $n$ -cube  $X$  を  $(n-1)$ -cube の間の写像

$$X_0 \longrightarrow X_1$$

とみなすと

$$\tilde{f}X = \operatorname{hofiber}(\tilde{f}X_0 \longrightarrow \tilde{f}X_1)$$

である。

**Definition 3.2.8.** 空間の  $n$ -cube  $X$  に対し,  $X$  が Cartesian とは  $a(X) : X(\emptyset) \rightarrow h_0(X)$  が弱同値のことと定義する。また  $X$  が  $k$ -Cartesian とは  $a(X)$  が  $k$  連結であることと定義する。

以上を dualize する。

**Definition 3.2.9.** 空間の  $n$ -cube  $X$  に対し, 写像

$$b(X) : h_1(X) \rightarrow X(\langle n \rangle)$$

を次で定義する:

$$h_1(X) = \operatorname{hocolim}_{K \neq \langle n \rangle} X(K) \rightarrow \operatorname{hocolim} X \rightarrow \operatorname{colim} X = X(\langle n \rangle)$$

$b(X)$  の homotopy cofiber を  $X$  の total homotopy cofiber という。

**Definition 3.2.10.** 空間の  $n$ -cube  $X$  に対し,  $X$  が  $k$ -co-Cartesian とは  $b(X) : h_1(X) \rightarrow X(\langle n \rangle)$  が弱同値のことと定義する。また  $X$  が  $k$ -co-Cartesian とは  $b(X)$  が  $k$  連結であることと定義する。

**Example 3.2.11.**  $n = 1$  のとき, 空間の 1-cube とは写像

$$X(\emptyset) \rightarrow X(\langle 1 \rangle)$$

のことである。 $X$  の total homotopy fiber とは, この写像の homotopy fiber であり,  $X$  が  $k$ -Cartesian であることと  $k$ -co-Cartesian であることは一致する。またそのための必要十分条件は  $X(\emptyset) \rightarrow X(\langle 1 \rangle)$  が  $k$  連結であることである。また  $X$  が Cartesian および co-Cartesian であるための必要十分条件は, 弱同値であることである。

$n = 2$  のとき, 空間の 2-cube とは, 可換図式

$$\begin{array}{ccc} X(\emptyset) & \longrightarrow & X(\{1\}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X(\{2\}) & \longrightarrow & X(\langle 2 \rangle) \end{array}$$

である。Blakers-Massey のホモトピー切除定理を言い換えると,  $X$  が co-Cartesian で

$$X(\emptyset) \rightarrow X(\{i\})$$

が  $k_i$  連結ならば,  $X$  は  $(k_1 + k_2 - 1)$ -Cartesian である, ということである。つまり Blakers-Massey の定理は co-Cartesian な図式がどれだけ Cartesian な図式に近いかを述べている。□

Blakers-Massey の定理を一般化するためには, もう少し言葉を準備する必要がある。

**Definition 3.2.12.**  $X$  を空間の  $n$ -cube とする。  $U \subset T \subset \langle n \rangle$  に対し

$$\partial_U^T X : \mathcal{P}(T - U) \rightarrow \mathbf{Spaces}$$

を

$$\partial_U^T X(V) = X(U \cup V)$$

と定義する。またこのような図式を  $X$  の面という。

**Definition 3.2.13.**  $X$  を空間の  $n$ -cube とする。

$X$  が strongly Cartesian であるとは, 任意の  $T \subset U \subset \langle n \rangle$  で  $|T - U| \geq 2$  であるものに対し,  $\partial_U^T X$  が Cartesian であることと定義する。

双対的に,  $X$  が strongly co-Cartesian であるとは, 任意の  $T \subset U \subset \langle n \rangle$  で  $|T - U| \geq 2$  であるものに対し,  $\partial_U^T X$  が co-Cartesian であることである。

**Lemma 3.2.14.** 空間の  $n$ -cube  $X$  が *strongly (co-)Cartesian* であるための必要十分条件は、その 2 次元の面が全て *(co-)Cartesian* であることである。

**Definition 3.2.15.** 空間の  $n$ -cube  $X$  が次の条件をみたすとき pushout cube という:

1. 各  $X(\emptyset) \rightarrow X(\{s\})$  が cofibration
2. 他の  $X(K)$  は  $X(\emptyset) \rightarrow X(\{s\})$  達から pushout を取ることで得られる。

双対的に、 $X$  が以下の条件をみたすとき pullback cube であるという:

1. 各  $X(\langle n \rangle - \{s\}) \rightarrow X(\langle n \rangle)$  が fibration
2. 他の  $X(K)$  は、これらの写像から pullback を取ることで得られる。

**Proposition 3.2.16.**  $X$  が pushout cube ならば、 $X$  は *strongly co-Cartesian* である。逆に  $X$  が *strongly co-Cartesian* ならば、pushout cube  $\tilde{X}$  と  $n$ -cube の弱同値

$$\tilde{X} \longrightarrow X$$

が存在する。ここで  $n$ -cube の弱同値とは、Example 2.1.11 で与えられたものである。

もちろん pullback cube に対し、双対的な命題が成り立つ。

**Proposition 3.2.17.**  $X$  が pullback cube ならば、 $X$  は *strongly Cartesian* である。逆に  $X$  が *strongly Cartesian* ならば、pullback cube  $\tilde{X}$  と  $n$ -cube の弱同値

$$X \longrightarrow \tilde{X}$$

が存在する。

**Remark 3.2.18.** 以上のことにおいて、 $k$ -Cartesian および  $k$ -co-Cartesian 以外の概念は、ホモトピー (余) 極限を持つモデル圏で定義できることに注意する。

これで、Blakers-Massey の定理の一般化 (とその双対版) を述べる準備ができた。

**Theorem 3.2.19.**  $X$  が *strongly co-Cartesian* な  $n$ -cube のとき、各  $i$  に対し

$$X(\emptyset) \longrightarrow X(\{i\})$$

が  $k_i$  連結なら、 $X$  は  $(\sum_{i=1}^n k_i - (n-1))$ -Cartesian である。

**Theorem 3.2.20.**  $X$  が *strongly Cartesian* な  $n$ -cube のとき、各  $i$  に対し

$$X(\langle n \rangle - \{i\}) \longrightarrow X(\langle n \rangle)$$

が  $k_i$  連結なら、 $X$  は  $(\sum_{i=1}^n k_i + (n-1))$ -co-Cartesian である。

Goodwillie は、ホモトピー関手

$$F : \mathbf{Spaces} \longrightarrow \mathbf{Spaces}$$

が与えられたとき、 $F$  が空間の  $n$ -cube の Cartesian および co-Cartesian な度合いをどのように変えるかを調べた。

**Definition 3.2.21.** モデル圏の間の関手

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

は、弱同値を保つときホモトピー関手と呼ばれる。

**Definition 3.2.22.**  $\mathcal{C}$  と  $\mathcal{D}$  をモデル圏とし、 $\mathcal{C}$  はホモトピー余極限を、 $\mathcal{D}$  はホモトピー極限を持つとする。このときホモトピー関手

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

が  $n$ -excisive であるとは、任意の *strongly co-Cartesian*  $(n+1)$ -cube  $X$  に対し  $F \circ X$  が Cartesian であることと定義する。

**Proposition 3.2.23.**  $F$  が  $(n-1)$ -excisive ならば  $n$ -excisive である。

*Proof.*  $(n+1)$ -cube  $X$  は  $n$ -cube の間の morphism

$$X_0 \longrightarrow X_1$$

とみなすことができる。定義より,  $X$  が strongly co-Cartesian ならば  $X_0$  も  $X_1$  も strongly co-Cartesian である。仮定より  $F$  は  $(n-1)$ -excisive であり,  $F \circ X_0$  と  $F \circ X_1$  は共に Cartesian となる。よって

$$\begin{aligned} a(F \circ X_0) &: (F \circ X_0)(\emptyset) \longrightarrow h_0(F \circ X_0) \\ a(F \circ X_1) &: (F \circ X_1)(\emptyset) \longrightarrow h_0(F \circ X_1) \end{aligned}$$

は共に弱同値である。つまり total homotopy fiber  $\tilde{f}(F \circ X_0)$  と  $\tilde{f}(F \circ X_1)$  は weakly contractible である。ここで Lemma 3.2.7 より

$$\tilde{f}(F \circ X) = \text{hofiber}(\tilde{f}(F \circ X_0) \longrightarrow \tilde{f}(F \circ X_1))$$

であるから,  $\tilde{f}(F \circ X)$  も weakly contractible である。□

**Example 3.2.24.**  $F$  が 0-excisive であるとは, 任意の morphism

$$f: X \longrightarrow Y$$

に対し, 1-cube

$$F(f): F(X) \longrightarrow F(Y)$$

が Cartesian, つまり弱同値であることである。よって 0-excisive なホモトピー関手とは, 全ての morphism を弱同値に写すものである。□

**Example 3.2.25.**  $F$  が 1-excisive ということは homotopy pushout diagram

$$\begin{array}{ccc} X(\emptyset) & \longrightarrow & X(\{1\}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X(\{2\}) & \longrightarrow & X(\langle 2 \rangle) \end{array}$$

を homotopy pullback diagram

$$\begin{array}{ccc} F(X(\emptyset)) & \longrightarrow & F(X(\{1\})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(X(\{2\})) & \longrightarrow & F(X(\langle 2 \rangle)) \end{array}$$

に変換するということである。よって cofibration を quasifibration に変換する。逆に, 任意の strongly co-Cartesian cube は各

$$X(\emptyset) \longrightarrow X(\{i\})$$

が cofibration である pushout cube に (up to weak equivalence で) 取り換えることができる (Proposition 3.2.16) ことから, cofibration を quasifibration に変換するホモトピー関手は 1-excisive である。

そのような関手で最も古くから知られているものは無限対称積  $\text{SP}^\infty(X)$  である。Quasifibration は Dold と Thom により [DT58] で導入された概念であるが, その論文の主定理として  $\text{SP}^\infty$  が cofibration を quasifibration に変換することが証明されている。よって  $\text{SP}^\infty$  は 1-excisive である。

より一般に,  $E$  をスペクトラムとし, 関手

$$F_E: \text{Spaces}_* \longrightarrow \text{Spectra}$$

を  $F_E(Y) = E \wedge Y$  で定義する。このとき

$$\pi_*(F_E(Y)) = E_*(Y)$$

である。スペクトラムの圏では, homotopy fiber は homotopy cofiber の desuspension であり,  $F$  は cofibration を保つことから  $F$  は 1-excisive になる。

より一般に  $E \wedge X^{\wedge n}$  は  $n$ -excisive である。 □

このようにホモトピー関手が  $n$ -excisive であるということは非常に強い条件であり, 通常は調べたいホモトピー関手がある  $n$  に関し  $n$ -excisive であることは期待できない。しかし Blakers-Massey の定理が示唆するように, 適当な連結性を仮定すればある次元までは  $n$ -excisive と同じ条件をみたく可能性はある。

**Definition 3.2.26.** ホモトピー関手

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

が stably  $n$ -excisive であるとは, ある  $\kappa$  と  $c$  が存在し, 任意の  $k_s \geq \kappa$  と strongly co-Cartesian な  $(n+1)$ -cube  $X$  で, 各  $s$  に対し

$$X(\emptyset) \longrightarrow X(\{s\})$$

が  $k_s$  連結なものに対し,  $F \circ X$  が  $(\sum k_s - c)$ -Cartesian であることと定義する。

また  $\kappa$  と  $c$  に対する上の条件を  $E_n(\kappa, c)$  と書くことにする。

**Definition 3.2.27.**  $\rho \geq 0$  に対し,  $F$  が  $\rho$ -analytic であるとは, 任意の  $n \geq 1$  に対し  $F$  が  $E_n(n\rho - q, \rho + 1)$  をみたすような  $q$  が存在することと定義する。

Blakers-Massey の定理を言い換えると次のようになる。

**Example 3.2.28.** 恒等関手

$$1 : \mathbf{Spaces} \longrightarrow \mathbf{Spaces}$$

に対し, (一般化された) ホモトピー切除定理より  $F$  は各  $n$  に対し  $E_n(n-1, 2)$  をみたす。よって  $1$  は 1-analytic である。 □

# Chapter 4

## Taylor タワーの構成

Chapter 1 で関数の微積と関手の微積の類似性を説明した際には, Taylor 展開 (MacLaurin 展開) を用いた。MacLaurin 展開は原点の近傍, つまり 0 に十分近い点での関数の多項式による近似であり, 関手の場合は  $*$  と十分近い空間, つまり  $X \rightarrow *$  の連結性が十分高い空間に対する多項式関手による近似と考えるべきである。

関数の微積を考える際には, 原点の周りだけでなく一般の  $x \in \mathbb{R}$  の近傍を考える必要があるように, 関手の微積の場合も空間  $B$  に対し連結性が十分高い写像

$$f : X \rightarrow B$$

を考えるべきである。よって関手の微積を行なう場としては, comma category  $(\mathbf{Spaces} \downarrow B)$  が自然な選択肢である。基点付きの場合は, もちろん  $(\mathbf{Spaces} \downarrow B)_*$  である。

この章では, まず fiberwise ホモトピー論の復習をしてから, Taylor tower (Goodwillie tower) の構成を述べる。

### 4.1 Fiberwise Homotopy

位相空間  $B$  に対し  $B$  上の空間の圏  $(\mathbf{Spaces} \downarrow B)$  がモデル構造を持つ, よってホモトピー論ができることは §2.1 で述べた通りである。しかしながら, Taylor tower の構成を行なうためには, 単にモデル圏になっていることだけでは不十分であり, 圏  $(\mathbf{Spaces} \downarrow B)$  におけるより具体的な構成が必要になる。

まずは fiberwise join である。

**Definition 4.1.1.**  $p_X : X \rightarrow B$  と  $p_Y : Y \rightarrow B$  の fiberwise join を

$$X *_B Y = \text{hocolim} \left( \begin{array}{ccc} X \times_B Y & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \\ X & & \end{array} \right)$$

で定義する。つまり

$$X *_B Y = \left( X \amalg Y \amalg (X \times_B Y) \times I \right) / \begin{array}{l} (x, y, 0) \sim x \\ (x, y, 1) \sim y \end{array}$$

である。

基点付きの場合は基点付きの圏での homotopy colimit を用いて定義する。

**Remark 4.1.2.** Fiberwise join は Strøm の論文 [Str72] で使われている。

Join の基本的な性質は以下のものである。

**Lemma 4.1.3.**  $\mathbf{Spaces} \downarrow B$  の object  $X_1, \dots, X_n$  に対し, 次の同相がある。

$$((X_1 *_B X_2) *_B \cdots *_B X_n) \cong ((X_1 \times_B \cdots \times_B X_n) \times \Delta^{n-1}) / \sim$$

ここで

$$\Delta^{n-1} = \left\{ (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum t_i = 1, t_i \geq 0 \right\}$$

とみなし, 関係  $\sim$  は,  $t_i = 0$  のとき

$$(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n; t_1, \dots, 0, \dots, t_n) \sim (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n; t_1, \dots, \hat{t}_i, \dots, t_n)$$

と同一視するものである。

*Proof.*  $n$  に関する帰納法である。  $n$  まで正しいと仮定して  $n+1$  の場合を証明するためには, 同相写像

$$\left( ((X_1 \times_B \dots \times_B X_n) \times \Delta^{n-1}) / \sim \right) *_B X_{n+1} \longrightarrow ((X_1 \times_B \dots \times_B X_{n+1}) \times \Delta^n) / \sim$$

を作ればよいが, それは写像

$$\begin{aligned} \Delta^{n-1} \times I &\longrightarrow \Delta^n \\ ((s_1, \dots, s_n), t) &\longmapsto (1-t)(s_1, \dots, s_n, 0) + t(0, \dots, 0, 1) \end{aligned}$$

で定義すればよい。 □

**Corollary 4.1.4.**  $*_B$  は *associative* である。

Fiberwise な圏を通常の位相空間の圏と比較するためには, 以下の functor を用いると便利である。これらは Larry Smith の Eilenberg-Moore spectral sequence の構成 [Smi70b, Smi70a] で使われている functor とその記号である。

**Definition 4.1.5.** Forgetful functor を

$$\begin{aligned} T &: (\mathbf{Spaces} \downarrow B) \longrightarrow \mathbf{Spaces} \\ F &: (\mathbf{Spaces} \downarrow B)_* \longrightarrow (\mathbf{Spaces} \downarrow B) \end{aligned}$$

と表わす。また

$$S : \mathbf{Spaces} \longrightarrow (\mathbf{Spaces} \downarrow B)$$

を  $S(X) = X \times B$  で,

$$G : (\mathbf{Spaces} \downarrow B) \longrightarrow (\mathbf{Spaces} \downarrow B)_*$$

を  $G(X \longrightarrow B) = X \amalg B \longrightarrow B$  で定義する。

$S$  の基点付きの version として

$$\Gamma : \mathbf{Spaces}_* \longrightarrow (\mathbf{Spaces} \downarrow B)_*$$

を  $\Gamma(X) = X \times B$  で定義する。更に

$$\Phi : (\mathbf{Spaces} \downarrow B)_* \longrightarrow \mathbf{Spaces}_*$$

を  $\Phi(X) = X/s(X)$  で定義する。ただし  $(\mathbf{Spaces} \downarrow B)_*$  の object を写像の組

$$\begin{aligned} p &: X \longrightarrow B \\ s &: B \longrightarrow X \end{aligned}$$

で  $p \circ s = 1_B$  であるものと考えている。

$S : \mathbf{Spaces} \longrightarrow \mathbf{Spaces} \downarrow B$  が join を保つことはすぐ分かる。

**Lemma 4.1.6.** 任意の  $X, Y$  に対し

$$S(X) *_B S(Y) \cong S(X * Y)$$

である。

更に, 次の位相空間に対する構成の類似が必要になる。

**Definition 4.1.7.**  $(\mathbf{Spaces} \downarrow B)$  の object  $X \rightarrow B$  に対し

$$\begin{aligned} C_B(X) &= X *_B S(\langle 1 \rangle) \\ \Sigma_B(X) &= X *_B S(\langle 2 \rangle) \end{aligned}$$

と定義する。

より一般に  $K \in \mathcal{P}(\langle n \rangle)$  と fiberwise join を取る, という操作は, 実は Taylor tower の構成にとって重要な意味を持つ。

## 4.2 ホモトピー関手の多項式近似

いよいよ Taylor tower の構成を行なう。最初の段階は, 関手  $F$  の  $n$  次多項式関手による近似  $P_n F$  の構成である。スペクトラム  $E$  と基点付き空間  $X$  に対し  $E \wedge X^{\wedge n}$  が  $n$ -excisive であることから,

$$F \text{ が } n \text{ 次以下の多項式} = F \text{ が } n\text{-excisive}$$

と考えることにしよう。よって  $P_n F$  としては  $F$  の  $n$ -excisive な関手による近似を考えることにする。そのために, まず stably  $n$ -excisive な関手に対し, それをより stable にする操作を考える。

**Definition 4.2.1.**  $\mathcal{D}$  をホモトピー極限を持つモデル圏とする。ホモトピー関手

$$F : (\mathbf{Spaces} \downarrow B) \rightarrow \mathcal{D}$$

に対し

$$T_n F : (\mathbf{Spaces} \downarrow B) \rightarrow \mathcal{D}$$

を

$$T_n F(X) = \operatorname{holim}_{\emptyset \neq K \in \mathcal{P}(\langle n+1 \rangle)} F(X *_B S(K))$$

で定義する。

また  $F$  から  $T_n F$  への natural transformation

$$t_n F : F \rightarrow T_n F$$

を次の合成で定義する:

$$\begin{aligned} F(X) &= F(X *_B S(\emptyset)) \\ &\simeq \operatorname{holim}_{K \in \mathcal{P}(\langle n+1 \rangle)} F(X *_B S(K)) \\ &\rightarrow \operatorname{holim}_{\emptyset \neq K \in \mathcal{P}(\langle n+1 \rangle)} F(X *_B S(K)) \\ &= T_n F(X) \end{aligned}$$

ここで  $(\mathbf{Spaces} \downarrow B)$  の object  $X \rightarrow B$  に対し

$$K \mapsto X *_B S(K)$$

は  $(\mathbf{Spaces} \downarrow B)$  の  $(n+1)$ -cube であるから, この cube を

$$J_X^n : \mathcal{P}(\langle n+1 \rangle) \rightarrow \mathbf{Spaces} \downarrow B$$

とする。

**Lemma 4.2.2.**  $J_X^n$  は *pushout cube*, よって *strongly co-Cartesian cube* である。

この cube を用いると, Definition 3.2.2 と Definition 3.2.4 の記号では

$$\begin{aligned} T_n F &= h_0(F \circ J_X^n) \\ t_n F &= a(F \circ J_X^n) \end{aligned}$$

となる。よって  $t_n F$  のホモトピーファイバーは,  $F$  が fiberwise join でできる strongly co-Cartesian cube をどれだけ Cartesian な cube にするかを測るものである。より正確に述べるために次の言葉を用いる。

**Definition 4.2.3.** ホモトピー関手

$$F, G : (\mathbf{Spaces} \downarrow B)_* \longrightarrow \mathcal{D}$$

の間の natural transformation

$$u : F \longrightarrow G$$

に対し,  $u$  が  $O_n(c, \kappa)$  をみたすとは, 任意の  $k$  連結 ( $k \geq \kappa$ ) な object  $X \longrightarrow B$  に対し

$$u_X : F(X) \longrightarrow G(X)$$

が  $((n+1)k - c)$  連結になること, と定義する。

また, ある  $c, \kappa$  で  $O_n(c, \kappa)$  をみたす自然変換  $u$  が存在するとき,  $F$  と  $G$  は  $n$  次まで一致するという。

**Proposition 4.2.4.** ホモトピー関手

$$F, G : (\mathbf{Spaces} \downarrow B)_* \longrightarrow \mathcal{D}$$

と *natural transformation*

$$u : F \longrightarrow G$$

について,  $u$  が  $O_n(c, \kappa)$  をみたすなら

$$T_n u : T_n F \longrightarrow T_n G$$

は  $O_n(c-1, \kappa-1)$  をみたす。よって  $T_n u$  は  $O_n(c, \kappa)$  をみたす。

この Proposition の証明の準備のために, その結論を言い換えてみる。証明すべきことは,  $k \geq \kappa - 1$  である  $k$  について, 任意の  $k$  連結な空間  $X$  に対し

$$T_n u : T_n F(X) \longrightarrow T_n G(X)$$

が  $((n+1)k - c + 1)$  連結であることである。つまり

$$\operatorname{holim}_{\emptyset \neq K \in \mathcal{P}(\langle n+1 \rangle)} F(X *_B S(K)) \longrightarrow \operatorname{holim}_{\emptyset \neq K \in \mathcal{P}(\langle n+1 \rangle)} G(X *_B S(K))$$

が  $((n+1)k - c + 1)$  連結であることを示す。

$X$  が  $k$  連結であることより,  $K \neq \emptyset$  に対し  $X *_B S(K)$  は  $(k+1)$  連結である。よって  $u$  が  $O_n(c, \kappa)$  をみたすことより

$$u : F(X *_B S(K)) \longrightarrow G(X *_B S(K))$$

は  $(n+1)(k+1) - c$  連結である。 $K \in \mathcal{P}(\langle n \rangle) - \{\emptyset\}$  に関しホモトピー極限を取ったときに連結性がどれだけ変化するかを調べればよい。そのために

$$Y(K) = \operatorname{hofiber}(F(X *_B S(K)) \longrightarrow G(X *_B S(K)))$$

とおくと, homotopy fiber はホモトピー極限でありホモトピー極限どうしは可換である (Lemma 2.2.41) ことから

$$\begin{aligned} & \operatorname{hofiber}(T_n F(X) \longrightarrow T_n G(X)) \\ &= \operatorname{hofiber}\left(\operatorname{holim}_{\emptyset \neq K \in \mathcal{P}(\langle n+1 \rangle)} F(X *_B S(K)) \longrightarrow \operatorname{holim}_{\emptyset \neq K \in \mathcal{P}(\langle n+1 \rangle)} G(X *_B S(K))\right) \\ &= \operatorname{holim}_{\emptyset \neq K \in \mathcal{P}(\langle n+1 \rangle)} \operatorname{hofiber}(F(X *_B S(K)) \longrightarrow G(X *_B S(K))) \\ &= \operatorname{holim}_{\emptyset \neq K \in \mathcal{P}(\langle n+1 \rangle)} Y(K) \end{aligned}$$

となり,  $Y(K)$  のホモトピー極限の連結性を調べればよいことが分かる。ここでホモトピー極限が cosimplicial space の Tot で与えられていたことを思い出し, ホモトピー極限のホモトピー群を調べるために Bousfield-Kan の cosimplicial space のホモトピースペクトル系列 (Theorem 2.2.38) を用いることを考えよう。

*Proof of Proposition 4.2.4.*  $\Omega^*Y$  を  $\text{holim}_K Y(K)$  を定義するときの cosimplicial space とする。この cosimplicial space のホモトピースペクトル系列

$$E_{-s,t}^2 \cong H^s(N\pi_t(\Omega^*Y)) \implies \pi_{t-s} \left( \text{holim}_{\emptyset \neq K \in \mathcal{P}(\langle n+1 \rangle)} Y(K) \right)$$

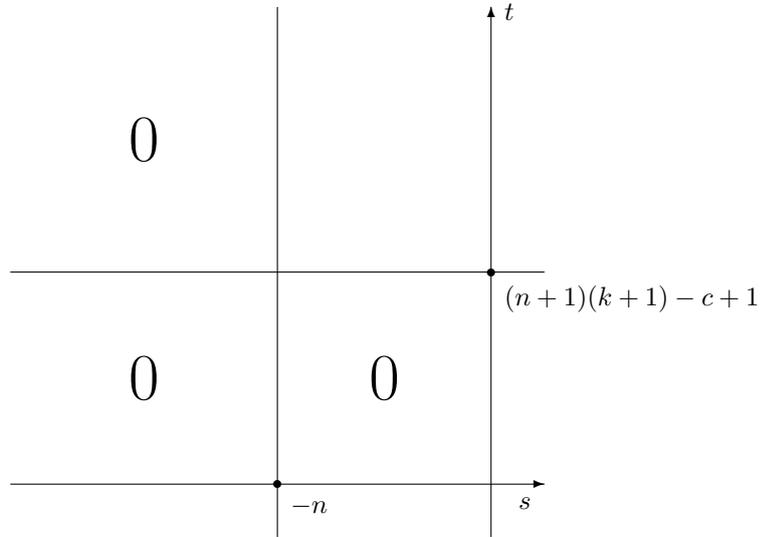
において, Lemma 2.2.40 より,  $s \geq n+1$  ならば

$$E_{-s,t}^2 = 0$$

であることが分かる。よってスペクトル系列は強収束する。また  $\Omega^*Y$  は  $Y(K)$  達の直積だったから, 仮定より  $t \leq (n+1)(k+1) - c$  に対し

$$\pi_t(\Omega^*Y) = 0$$

となる。



よって  $s+t < (n+1)(k+1) - c + 1 - n$  に対し

$$E_{s,t}^2 = E_{s,t}^\infty = 0$$

となる。つまり  $i \leq (n+1)k - c + 1$  に対し

$$\pi_i \left( \text{holim}_{\emptyset \neq K \in \mathcal{P}(\langle n+1 \rangle)} Y(K) \right) = 0$$

となる。 □

次も Proposition 4.2.4 と同様に示すことができる。

**Proposition 4.2.5** ([Goo92]). 関手

$$X : \mathcal{P}(\langle m \rangle) \times \mathcal{P}_0(\langle n \rangle) \longrightarrow \mathcal{D}$$

について, 各  $K \in \mathcal{P}_0(\langle n \rangle)$  に対し  $X(-, K)$  が  $k_K$  連結であると仮定する。このとき

$$\text{holim}_{K \in \mathcal{P}_0(\langle n \rangle)} X(-, K) : \mathcal{P}(\langle m \rangle) \longrightarrow \mathcal{D}$$

は  $\min_{K \in \mathcal{P}_0(\langle n \rangle)} \{k_K - |K| + 1\}$ -Cartesian である。

これを用いると次が分かる。

**Proposition 4.2.6.** ホモトピー関手

$$F : (\mathbf{Spaces} \downarrow B)_* \longrightarrow \mathcal{D}$$

が  $E_n(c, \kappa)$  をみたすとき次が成り立つ:

1.  $T_n F$  は  $E_n(c-1, \kappa-1)$  をみたす。
2.  $t_n F : F \longrightarrow T_n F$  は  $O_n(c, \kappa)$  をみたす。

*Proof.* 1. まず  $Y$  を strongly co-Cartesian  $(n+1)$ -cube とする。すると  $Y *_B S(K)$  も strongly co-Cartesian である。更に

$$Y(\emptyset) \longrightarrow Y(\{s\})$$

が  $k_s$  連結 ( $k_s \geq \kappa-1$ ) と仮定すると,  $K \neq \emptyset$  なら

$$Y(\emptyset) *_B S(K) \longrightarrow Y(\{s\}) *_B S(K)$$

は  $(k_s+1)$  連結になる。このとき  $k_s+1 \geq \kappa$  であることに注意する。

ここで  $F$  が  $E_n(c, \kappa)$  をみたすことから  $F(Y *_B S(K))$  が  $(\sum(k_s+1)-c)$  連結, つまり  $(\sum k_s+n+1-c)$ -Cartesian になる。よって上の定理より  $\text{holim}_{K \in \mathcal{P}_0((n+1))} F(Y *_B S(K))$  は  $\min_{K \neq \emptyset} \{\sum k_s+n+1-c-|K|+1\}$ -Cartesian, よって  $(\sum k_s - (c-1))$ -Cartesian になる。

2.  $X \longrightarrow B$  が  $k$  連結であるとする。すると

$$X *_B S(\emptyset) = X \longrightarrow X *_B S(\{s\}) \simeq B$$

も  $k$  連結である。  $F$  が  $E_n(c, \kappa)$  をみたすなら,  $k \geq \kappa$  に対し  $F(X *_B S(-))$  は  $(\sum k-c) = ((n+1)k-c)$ -Cartesian な cube である。よって

$$F(X *_B S(\emptyset)) \longrightarrow \text{holim}_{\emptyset \neq K \in \mathcal{P}((n+1))} F(X *_B S(K))$$

は  $((n+1)k-c)$  連結である。ところがこれは  $t_n F$  に他ならない。 □

このことから  $T_n$  を繰り返すと  $n$ -excisive な関手に近づいていくことが分かる。つまり

$$\begin{aligned} & F : E_n(c, \kappa) \text{ をみたす} \\ \implies & T_n F : E_n(c-1, \kappa-1) \text{ をみたす} \\ \implies & \dots \\ \implies & T_n^i F : E_n(c-i, \kappa-i) \text{ をみたす} \\ \implies & \dots \end{aligned}$$

であるが,  $T_n^i F$  が  $E_n(c-i, \kappa-i)$  をみたすということは

$X$  が strongly co-Cartesian  $(n+1)$ -cube で各  $X(\emptyset) \longrightarrow X_{\{i\}}$  が  $k_i$  連結 ( $k_i \geq \kappa-i$ ) なら  $\tilde{f}(F \circ X)$  が  $(\sum k_i - c + i)$  連結

ということであり,  $i \rightarrow \infty$  のとき

$$\kappa - i \rightarrow -\infty \tag{4.1}$$

$$-c + i \rightarrow +\infty \tag{4.2}$$

であるから  $i \rightarrow \infty$  のときの  $T_n^i F \circ X$  の“極限”は Cartesian になる。以上のことから次を  $F$  の  $n$  次多項式による近似と考えるのは自然だろう。

**Definition 4.2.7.** 上の記号の下で

$$P_n F(X) = \operatorname{hocolim}(F(X) \xrightarrow{t_n F} T_n F(X) \xrightarrow{t_n T_n F} T_n^2 F(X) \xrightarrow{t_n T_n^2 F} \dots)$$

と定義する。当然 natural transformation

$$p_n F : F \longrightarrow P_n F$$

がある。

**Proposition 4.2.8.**  $F$  が stably  $n$ -excisive ならば  $P_n F$  は  $n$ -excisive である。

*Proof.*  $F$  が stably  $n$ -excisive であることから、ある  $c$  と  $\kappa$  に対し  $F$  は  $E_n(c, \kappa)$  をみたす。よって  $T^i F$  は  $E_n(c-i, \kappa-i)$  をみたす。つまり strongly co-Cartesian  $(n+1)$ -cube  $X$  に対し

$$X(\emptyset) \longrightarrow X(\{j\})$$

が  $k_j$  連結 ( $k_j \geq \kappa - i$ ) なら

$$T_n^i F(X(\emptyset)) \longrightarrow \operatorname{holim}_{\emptyset \neq K} T_n^i F(X(K))$$

は  $(\sum k_j - c + i)$  連結である。ここで sequential colimit とホモトピー群が可換であることより

$$\operatorname{hocolim}_i \operatorname{hofiber}(T_n^i F(X(\emptyset)) \longrightarrow \operatorname{holim}_{\emptyset \neq K} T_n^i F(X(K))) \simeq *$$

となる。今  $\operatorname{holim}$  の定義域の圏の分類空間は有限 CW 複体なので Lemma 2.2.41 より sequential homotopy colimit と可換になり

$$\begin{aligned} & \operatorname{hocolim}_i \operatorname{hofiber}(T_n^i F(X(\emptyset)) \longrightarrow \operatorname{holim}_{\emptyset \neq K} T_n^i F(X(K))) \\ &= \operatorname{hofiber}(\operatorname{hocolim}_i T_n^i F(X(\emptyset)) \longrightarrow \operatorname{hocolim}_i \operatorname{holim}_{\emptyset \neq K} T_n^i F(X(K))) \\ &= \operatorname{hofiber}(\operatorname{hocolim}_i T_n^i F(X(\emptyset)) \longrightarrow \operatorname{holim}_{\emptyset \neq K} \operatorname{hocolim}_i T_n^i F(X(K))) \\ &= \operatorname{hofiber}(P_n F(X(\emptyset)) \longrightarrow \operatorname{holim}_{\emptyset \neq K} P_n F(X(K))) \end{aligned}$$

である。よって  $P_n F(X)$  は Cartesian となり  $P_n F$  は  $n$ -excisive であることが分かった。  $\square$

実は  $F$  が stably  $n$ -excisive という仮定は不要である。[Goo03] において、次が示されている。

**Theorem 4.2.9.** 任意のホモトピー関手  $F$  に対し  $P_n F$  は  $n$ -excisive である。

証明には次の事実を使う。

**Lemma 4.2.10.**  $F$  をホモトピー関手とする。任意の strongly co-Cartesian  $(n+1)$ -cube  $X$  に対し、Cartesian  $(n+1)$ -cube  $Y$  で次を可換にするものが存在する:

$$\begin{array}{ccc} F \circ X & \longrightarrow & T_n F \circ X \\ & \searrow & \nearrow \\ & Y & \end{array}$$

*Proof of Theorem 4.2.9.*  $X$  を strongly co-Cartesian  $(n+1)$ -cube とすると、Lemma より次の図式を可換にする Cartesian  $(n+1)$ -cube  $Y_1, Y_2, \dots$  がある:

$$\begin{array}{ccccccc} F \circ X & \longrightarrow & T_n F \circ X & \longrightarrow & T_n^2 F \circ X & \longrightarrow & \dots \\ & \searrow & \nearrow & & \searrow & \nearrow & \\ & & Y_1 & & Y_2 & & \dots \end{array}$$

これは

$$P_n F(X) = \operatorname{hocolim}_i Y_i$$

を意味する。ところが  $Y_i$  が Cartesian であることから

$$Y_i(\emptyset) \simeq_w \operatorname{holim}_{\emptyset \neq K \in \mathcal{P}(\langle n+1 \rangle)} Y_i(K)$$

である。よって

$$\begin{aligned} P_n F(X)(\emptyset) &= \operatorname{hocolim}_i Y_i(\emptyset) \\ &\simeq_w \operatorname{hocolim}_i \operatorname{holim}_{\emptyset \neq K \in \mathcal{P}(\langle n+1 \rangle)} Y_i(K) \\ &\simeq_w \operatorname{holim}_{\emptyset \neq K \in \mathcal{P}(\langle n+1 \rangle)} \operatorname{hocolim}_i Y_i(K) \\ &= \operatorname{holim}_{\emptyset \neq K \in \mathcal{P}(\langle n+1 \rangle)} P_n F(K) \end{aligned}$$

となり, 任意の strongly co-Cartesian  $(n+1)$ -cube  $X$  に対し  $P_n F \circ X$  が Cartesian, 故に  $P_n F$  が  $n$ -excisive であることが分かる。□

$F$  と  $P_n F$  の関係を調べるためには  $p_n F$  がどれぐらい良い近似であるかを測る必要がある。そのためには Proposition 4.2.4 が使える。

**Lemma 4.2.11.**  $F$  が  $E_n(c, \kappa)$  をみたすならば

$$p_n F : F \longrightarrow P_n F$$

は  $O_n(c, \kappa)$  をみたす。

*Proof.*  $F$  が  $E_n(c, \kappa)$  をみたすので  $T_n^i F$  は  $E_n(c-i, \kappa-i)$  をみたす。よって

$$t_n T_n^i F : T_n^i F \longrightarrow T_n^{i+1} F$$

は  $O_n(c-i, \kappa-i)$  を, 故に  $O_n(c, \kappa)$  をみたす。そして, それらの合成として

$$F \longrightarrow T_n^i F$$

は  $O_n(c, \kappa)$  をみたす。Sequential homotopy colimit と  $\pi_*(-)$  は可換だから

$$p_n F : F \longrightarrow P_n F$$

も  $O_n(c, \kappa)$  をみたすことが分かる。□

以上のことから,  $P_n F$  が  $F$  の “良い近似” になりそうということが予想できる。実際, 次が証明できる。

**Theorem 4.2.12.**  $F$  が  $\rho$ -analytic なホモトピー関手で  $X \longrightarrow B$  が  $(\rho+1)$  連結なら  $F(X)$  は  $\operatorname{holim}_n P_n F(X)$  と weak equivalence になる。

この定理を証明するためには, もちろん natural transformation の列

$$\cdots \longrightarrow P_n F \longrightarrow P_{n-1} F \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 F$$

を作らないといけない。次の節でそれを行なおう。

### 4.3 タワーの構成

前節で定義した  $P_n F$  達から成るタワーを構成するためには, 自然変換

$$P_n F \longrightarrow P_{n-1} F$$

が必要である。より一般に  $m < n$  に対し

$$P_n F \longrightarrow P_m F$$

を作ることにしよう。そのためには, まず

$$T_n F \longrightarrow T_m F$$

が必要である。

**Definition 4.3.1.**  $m < n$  に対し  $\langle m \rangle \subset \langle n \rangle$  とみなし,

$$\mathcal{P}(\langle m \rangle) \subset \mathcal{P}(\langle n \rangle)$$

とみなす。よって定義域の圏の制限により  $\text{holim}$  の間の写像

$$T_n F(X) = \text{holim}_{K \in \mathcal{P}_0(\langle n+1 \rangle)} F(X *_B S(K)) \longrightarrow \text{holim}_{K \in \mathcal{P}_0(\langle m+1 \rangle)} F(X *_B S(K)) = T_m F(X)$$

を得る。これを  $q_n^m$  と書く。

**Lemma 4.3.2.** 以下の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} T_n^i F & \xrightarrow{t_n T_n^i F} & T_n^{i+1} F \\ \downarrow (q_n^m)^i & & \downarrow (q_n^m)^{i+1} \\ T_m^i F & \xrightarrow{t_m T_m^i F} & T_m^{i+1} F \end{array}$$

*Proof.* まず

$$T_n^i F(X) = \text{holim}_{\emptyset \neq K_1, \dots, K_i \in \mathcal{P}(\langle n+1 \rangle)} F(X *_B S(K_1) *_B \cdots *_B S(K_i)) \quad (4.3)$$

$$= \text{holim}_{\emptyset \neq \mathbb{K} \in \mathcal{P}(\langle n+1 \rangle)^i} F(X *_B S(K_1 * \cdots * K_i)) \quad (4.4)$$

であることに注意する。次の図式で

$$\begin{array}{ccccc} T_n^i F & \xrightarrow{t_n T_n^i F} & T_n^{i+1} & \xlongequal{\quad} & T_n^{i+1} F \\ \downarrow (q_n^m)^i & & \downarrow T_n(q_n^m)^i & & \downarrow \\ T_m^i F & \xrightarrow{t_m T_m^i F} & T_n T_m^i F & \xrightarrow{q_n^m} & T_m^{i+1} F \end{array}$$

左は  $t_n$  の naturality より可換になる。一方, 右の図式は部分圏の包含関係

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\langle n+1 \rangle)^{i+1} & \xlongequal{\quad} & \mathcal{P}(\langle n+1 \rangle)^{i+1} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{P}(\langle n+1 \rangle) \times \mathcal{P}(\langle m+1 \rangle)^i & \longleftarrow & \mathcal{P}(\langle m+1 \rangle)^{i+1} \end{array}$$

から誘導されたものであり, やはり可換である。 □

**Definition 4.3.3.**  $(q_n^m)^i$  から誘導された自然変換を

$$q_n^m : P_n F \longrightarrow P_m F$$

とかく。また  $q_n = q_n^{n-1} : P_n F \longrightarrow P_{n-1} F$  とかく。

以上のことから, 自然変換の列

$$\dots \xrightarrow{q_{n+1}} P_n F \xrightarrow{q_n} P_{n-1} F \xrightarrow{q_{n-1}} \dots$$

ができた。これを Taylor タワー, もしくは Goodwillie タワーという。

定義から

$$\begin{array}{ccc} & & P_n F \\ & \nearrow p_n F & \downarrow q_n \\ F & \xrightarrow{p_{n-1} F} & P_{n-1} F \end{array}$$

は可換であることに注意する。

以上で  $P_n F$  と  $F$  を比較する準備ができた。

*Proof of Theorem 4.2.12.*  $F$  が  $\rho$ -analytic であることより  $F$  はある  $q$  に対し  $E_n(n\rho - q, \rho + 1)$  をみたす。よって

$$p_n F : F \longrightarrow P_n F$$

は  $O_n(n\rho - q, \rho + 1)$  をみたす。これは任意の  $k$  連結 ( $k \geq \rho + 1$ ) な  $X \longrightarrow B$  に対し

$$p_n F(X) : F(X) \longrightarrow P_n F(X)$$

が  $((n+1)k - (n\rho - q))$  連結であることである。  $Y_n$  を  $p_n F(X)$  のホモトピーファイバーとすると

$$\begin{aligned} \operatorname{holim}_n Y_n &= \operatorname{holim}_n \operatorname{hofiber}(F(X) \longrightarrow P_n F(X)) \\ &= \operatorname{hofiber}(F(X) \longrightarrow \operatorname{holim}_n P_n F(X)) \end{aligned}$$

であるから  $\operatorname{holim}_n Y_n$  が weakly contractible であることを示せばよいが, sequential homotopy limit に対する Milnor 型の完全列

$$0 \longrightarrow \lim_n^1 \pi_{*-1}(Y_n) \longrightarrow \pi_*(\operatorname{holim}_n Y_n) \longrightarrow \lim_n \pi_*(Y_n) \longrightarrow 0$$

より  $\pi_*(\operatorname{holim}_n Y_n) = 0$  となる。 □

最後に  $P_n F$  に関連したことからまとめておこう。まず Taylor タワーの底の部分についてである。

**Lemma 4.3.4.** 任意の  $(\mathbf{Spaces} \downarrow B)_*$  の object  $X \longrightarrow B$  に対し

$$P_0 F(X) \underset{w}{\simeq} F(*_B)$$

である。

*Proof.* 定義より

$$\begin{aligned} T_0 F(X) &= \operatorname{holim}_{\emptyset \neq K \in \mathcal{P}(\{1\})} F(X *_B S(K)) \\ &= F(X *_B S(\{1\})) \\ &= F(C_B X) \\ &\underset{w}{\simeq} F(*_B) \end{aligned}$$

最後に  $F$  がホモトピー関手であることを使った。 □

$P_n F$  の構成をするだけなら  $F$  の値域は  $(\mathbf{Spaces} \downarrow B)_*$  である必要はない。ホモトピー極限を持つモデル圏ならばよい。

**Definition 4.3.5.**  $\mathcal{C}$  をホモトピー極限と 0 object  $*$  を持つモデル圏とする。ホモトピー関手

$$F : (\mathbf{Spaces} \downarrow B)_* \longrightarrow \mathcal{C}$$

は、任意の object  $X$  に対し  $P_{n-1}F(X) \xrightarrow{w} *$  であるとき  $n$ -reduced と呼ばれる。

$n$ -reduced かつ  $n$ -excisive な関手を  $n$ -homogeneous な関手という。

**Remark 4.3.6.**  $B = \{*\}$  のとき、つまり

$$F : \mathbf{Spaces}_* \longrightarrow \mathbf{Spaces}_*$$

のとき  $P_0 F$  は  $F$  の“定数項”  $F(*)$  である。よって 1-reduced なホモトピー関手とは  $F(*)$  が可縮であるものである。

**Example 4.3.7.** Example 3.2.25 より  $\mathbf{SP}^\infty$  は 1-excisive である。1-reduced であることはすぐ分かる。よって 1-homogeneous である。より一般にスペクトラム  $E$  に対し  $X \mapsto E \wedge X$  は基点付き空間の圏からスペクトラムの圏への 1-homogeneous 関手である。□

次の性質はホモトピー極限とホモトピー余極限の性質 (Lemma 2.2.41) からすぐ分かる。

**Lemma 4.3.8.**  $T_n, P_n F$  とホモトピー (余) 極限について以下が成り立つ:

$$1. T_n(\operatorname{holim} F) = \operatorname{holim} T_n F$$

2.  $BC$  が有限複体なら

$$P_n(\operatorname{holim}_C F) \xrightarrow{w} \operatorname{holim}_C P_n F$$

$$3. T_n(\operatorname{hocolim}_{i \geq 0} F_i) \xrightarrow{w} \operatorname{hocolim}_{i \geq 0} T_n F_i$$

$$4. P_n(\operatorname{hocolim}_{i \geq 0} F_i) \xrightarrow{w} \operatorname{hocolim}_{i \geq 0} P_n F_i$$

これを用いると次が分かる。

**Lemma 4.3.9.** 任意の  $0 \leq m \leq n$  に対し

$$P_m(t_n F) : P_m F \longrightarrow P_m T_n F$$

は *weak equivalence* である。

*Proof.*  $P_m F$  が  $m$ -excisive で  $m \leq n$  なので Proposition 3.2.23 より  $n$ -excisive である。よって strongly co-Cartesian  $(n+1)$ -cube  $X$  に対し

$$P_m F(X(\emptyset)) \xrightarrow{w} \operatorname{holim}_{\emptyset \neq K \in \mathcal{P}(\langle n+1 \rangle)} P_m F(X(K))$$

は弱同値である。よって

$$\begin{aligned} P_m T_n F(Y) &= P_m \left( \operatorname{holim}_{\emptyset \neq K \in \mathcal{P}(\langle n+1 \rangle)} F(Y *_B S(K)) \right) \\ &\xrightarrow{w} \operatorname{holim}_{\emptyset \neq K \in \mathcal{P}(\langle n+1 \rangle)} P_m F(Y *_B S(K)) \\ &\xrightarrow{w} P_m F(Y *_B S(\emptyset)) \\ &= P_m F(Y) \end{aligned}$$

□

**Corollary 4.3.10.**  $m \leq n$  ならば

$$P_m(p_n F) : P_m F \longrightarrow P_m P_n F$$

は弱同値である。

*Proof.* Lemma を繰り返し替して用いれば

$$\begin{aligned} P_m F &\xrightarrow{\cong} \operatorname{hocolim}_{i \geq 0} P_m T_n^i F \\ &\cong_w P_m \left( \operatorname{hocolim}_{i \geq 0} T_n \right) \\ &= P_m P_n F \end{aligned}$$

を得る。 □

**Remark 4.3.11.** Taylor tower (Goodwillie tower) の構成をみれば分かるように、ある関手

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

に対し Goodwillie 流の関手の微積分を行なうときには、定義域の圏  $\mathcal{C}$  には fibration の概念は不要であることに注意する。このような weak equivalence と cofibration だけを持つ圏は Waldhausen の代数的  $K$  理論 [Wal78c, Wal78a, Wal78b, Wal79, Wal85] で用いられている。Waldhausen は “category with cofibrations and weak equivalences” と呼んでいる。

もちろん他にもホモトピー (余) 極限は必要であるが。

# Chapter 5

## Taylor タワーの layer について

### 5.1 Taylor タワーの第 $n$ 層

前章では Taylor タワーと呼ばれる列

$$\dots \xrightarrow{q_{n+1}} P_n F \xrightarrow{q_n} P_{n-1} F \xrightarrow{q_{n-1}} \dots$$

が構成された

これが fibration の tower, つまり各  $q_n$  が fibration になっていてくれるとうれしい。一般に small (discrete) category の inclusion

$$\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{C}$$

と関手

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Spaces}$$

に対し, 自然な projection

$$\mathrm{holim} F \longrightarrow \mathrm{holim} F|_{\mathcal{D}}$$

は fibration になる。よって  $m < n$  に対し

$$(q_n^m)^i : T_n^i F(X) \longrightarrow T_m^i F(X)$$

は fibration である。しかしながら fibration の homotopy colimit

$$q_n^m : P_n(X) = \mathrm{hocolim}_i T_n^i F(X) \longrightarrow \mathrm{hocolim}_i T_m^i F(X) = P_m(X)$$

がまた fibration である保証はない。そこでそのホモトピーファイバーを考えることにする。

**Definition 5.1.1.** ホモトピー関手  $F$  に対し

$$D_n F(X) = \mathrm{hofiber}(q_n : P_n F(X) \longrightarrow P_{n-1} F(X))$$

と定義し  $F$  の第  $n$  層 ( $n$ -th layer) という。

もしタワーが収束するならば  $D_n F(X) = \mathrm{hofiber}(P_n F(X) \xrightarrow{q_n} P_{n-1} F(X))$  を計算することにより  $F(X)$  に関する情報が得られそうである。この章では  $D_n F(X)$  を計算する方法を考える。

まず  $D_n F(X)$  についての最も基本的な性質は次のものである。

**Proposition 5.1.2.** 任意のホモトピー関手  $F$  に対し  $D_n F$  は  $n$ -homogeneous である。

*Proof.*  $P_n F$  と  $P_{n-1} F$  が  $n$ -excisive であることより

$$D_n F = \mathrm{hofiber}(q_n : P_n F(X) \longrightarrow P_{n-1} F(X))$$

も  $n$ -excisive であることが分かる。

次に  $n$ -reduced であることを示す。

$$\begin{aligned} P_{n-1}D_nF &= P_{n-1} \operatorname{hofiber}(P_nF \longrightarrow P_{n-1}F) \\ &= \operatorname{hofiber}(P_{n-1}P_nF \longrightarrow P_{n-1}P_{n-1}F) \end{aligned}$$

となるが Corollary 4.3.10 より

$$\begin{array}{ccc} P_{n-1}F & \xlongequal{\quad} & P_{n-1}F \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ P_{n-1}P_nF & \longrightarrow & P_{n-1}P_{n-1}F \end{array}$$

であるから

$$P_{n-1}D_nF \underset{w}{\simeq} \operatorname{hofiber}(1_{P_{n-1}F}) = *$$

であることが分かる。 □

Goodwillie はこの事実に着目し, Taylor tower の第  $n$  層  $D_nF$  を調べるために一般の  $n$ -homogeneous functor の性質を調べた。次節ではそのために多変数関手について考える。

## 5.2 多変数の場合

$D_nF(X)$  は  $\frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}(0)x^n$  に対応するはずのものであり,  $n$ -homogeneous である。双一次形式と二次形式の間の対応を思い出すと, このような homogeneous functor を調べるときに multilinear functor を考えることは自然である。この節では, 多変数関手の性質を調べることにする。

まずは 1 変数の場合の概念の拡張を行なう。以下  $\mathcal{C}$  と  $\mathcal{D}$  を  $(\mathbf{Spaces} \downarrow B)_*$  など, その間のホモトピー関手に対し Taylor tower の構成が行なえる圏とする。

**Definition 5.2.1.** 関手

$$F : \underbrace{\mathcal{C} \times \cdots \times \mathcal{C}}_r = \mathcal{C}^r \longrightarrow \mathcal{D}$$

は各変数に関しホモトピー関手であるとき, ホモトピー関手と呼ばれる。

ホモトピー関手

$$F : \mathcal{C}^r \longrightarrow \mathcal{D}$$

と非負の整数の列  $I = (n_1, \dots, n_r)$  に対し以下の概念を定義する:

1.  $F$  が  $I$ -excisive であるとは  $i$  番目の変数について  $n_i$ -excisive であること
2.  $F$  が  $I$ -reduced であるとは  $i$  番目の変数について  $n_i$ -reduced であること

また  $F$  が  $r$  重線形とは  $F$  が  $(1, \dots, 1)$ -excisive かつ  $(1, \dots, 1)$ -reduced であることである。線形代数のように多重線形 (multilinear) という言葉も用いる。

また, 各変数について  $T_n$  や  $P_n$  の構成を行なうことにより, 非負の整数の列  $I = (n_1, \dots, n_r)$  に対し,

$$\begin{aligned} T_I F &: \mathcal{C}^r \longrightarrow \mathcal{D} \\ P_I F &: \mathcal{C}^r \longrightarrow \mathcal{D} \end{aligned}$$

を得る。

多変数関手と 1 変数関手を関連づけるには diagonal functor

$$\Delta_r : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^r$$

を用いればよい。

**Proposition 5.2.2.**  $r$  変数ホモトピー関手  $F$  が  $(n_1, \dots, n_r)$ -excisive ならば

$$F \circ \Delta_r : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

は  $(\sum_i n_i)$ -excisive である。

**Proposition 5.2.3.**  $n$  変数ホモトピー関手  $F$  が  $(1, \dots, 1)$ -reduced ならば

$$F \circ \Delta_n : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

は  $n$ -reduced である。

これらの証明のためにはいくつかの準備が必要である。まず大きな cube を小さな cube に分けたときに何が言えるかを調べる必要がある。

**Lemma 5.2.4.**  $F$  を  $n$ -excisive なホモトピー関手とする。  $m > n$  に対し

$$Y : \mathcal{P}(\langle m \rangle) \longrightarrow (\mathbf{Spaces} \downarrow B)_*$$

を *strongly co-Cartesian  $m$ -cube* とするとき

$$F(Y(\emptyset)) \longrightarrow \operatorname{holim}_{\substack{K \in \mathcal{P}(\langle m \rangle) \\ |\langle m \rangle - K| \leq n}} F(Y(K))$$

は弱同値である。

*Proof.*  $m$  に関する帰納法。  $m = n + 1$  のときは  $n$ -excisive の条件そのものである。  $m$  のとき成り立つと仮定して  $m + 1$  のときを示す。

$K \in \mathcal{P}(\langle m + 1 \rangle)$  をとり。

$$Z(K) = \operatorname{holim}_{\substack{K \subset L \in \mathcal{P}(\langle m + 1 \rangle) \\ |\langle m + 1 \rangle - K| \leq n}} F(Y(L))$$

とおく。制限により自然な写像

$$F(Y(K)) \longrightarrow Z(K)$$

があるが、これが  $\operatorname{holim}$  の弱同値

$$\operatorname{holim}_{\emptyset \neq K \in \mathcal{P}(\langle m + 1 \rangle)} F(Y(K)) \xrightarrow{\cong} \operatorname{holim}_{\emptyset \neq K \in \mathcal{P}(\langle m + 1 \rangle)} Z(K)$$

を誘導することを示す。そのために

$$Z(K) = \operatorname{holim}_{\substack{M \in \mathcal{P}(\langle m + 1 \rangle - K) \\ |\langle m + 1 \rangle - K - M| \leq n}} F(Y(K \amalg M))$$

とみなし

$$\tilde{Y}_K(M) = Y(K \amalg M)$$

とおく。  $Y$  は *strongly co-Cartesian* だから、その面である  $\tilde{Y}_K$  も *strongly co-Cartesian* になる。  $K \neq \emptyset$  に対し  $|\langle m + 1 \rangle - K| \leq m$  だから、帰納法の仮定により

$$F(Y(K)) = F(\tilde{Y}_K(\emptyset)) \xrightarrow{\cong} \operatorname{holim}_{\substack{M \in \mathcal{P}(\langle m + 1 \rangle - K) \\ |\langle m + 1 \rangle - K - M| \leq n}} F(\tilde{Y}_K(M)) = Z(K)$$

となる。よって

$$\operatorname{holim}_{\emptyset \neq K \in \mathcal{P}(\langle m + 1 \rangle)} F(Y(K)) \xrightarrow{\cong} \operatorname{holim}_{\emptyset \neq K \in \mathcal{P}(\langle m + 1 \rangle)} Z(K)$$

である。

また  $F$  が  $n$ -excisive で  $m > n$  であることから  $F$  は  $m$ -excisive でもある。よって弱同値

$$F(Y(\emptyset)) \xrightarrow{\cong} \operatorname{holim}_{\emptyset \neq K \in \mathcal{P}(\langle m+1 \rangle)} F(Y(K))$$

を得る。可換図式

$$\begin{array}{ccc} F(Y(\emptyset)) & \longrightarrow & Z(\emptyset) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \\ \operatorname{holim}_{\emptyset \neq K \in \mathcal{P}(\langle m+1 \rangle)} F(Y(K)) & \xrightarrow{\cong} & \operatorname{holim}_{\emptyset \neq K \in \mathcal{P}(\langle m+1 \rangle)} Z(K) \end{array}$$

より  $Z$  が Cartesian であることを示せばよい。そのために Covering Lemma (Theorem 2.2.43) を用いる。

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \{L \in \mathcal{P}(\langle m+1 \rangle) \mid |\langle m+1 \rangle| \leq n\} \\ \mathcal{X}_i &= \{L \in \mathcal{X} \mid i \in L\} \end{aligned}$$

とおけば Covering Lemma の条件をみたし  $Z$  が Cartesian であることが分かる。  $\square$

*Proof of Proposition 5.2.2.* 証明は Lemma 5.2.4 を用いる、というより Lemma 5.2.4 の証明の真似をする。

$F$  が  $(n_1, \dots, n_r)$ -excisive であると仮定する。 $F \circ \Delta_r$  が  $\sum n_i$ -excisive であることを示したい。 $n = \sum n_i$  とおく。任意の strongly co-Cartesian  $(n+1)$ -cube  $Y$  に対し  $F \circ \Delta_r \circ Y$  が Cartesian であることを示す。

そこで  $(n+1)$ -cube  $Z$  を

$$Z(K) = \operatorname{holim}_{\substack{K \subset L_1 \in \mathcal{P}(\langle n+1 \rangle) \\ |(n+1) - L_1| \leq n_1}} \cdots \operatorname{holim}_{\substack{K \subset L_r \in \mathcal{P}(\langle n+1 \rangle) \\ |(n+1) - L_r| \leq n_r}} F(Y(L_1, \dots, L_r))$$

で定義する。Lemma 5.2.4 の証明の途中の議論を各変数に用いると弱同値

$$(F \circ \Delta_r \circ Y)(K) = F(Y(K), \dots, Y(K)) \xrightarrow{\cong} Z(K)$$

を得る。可換図式

$$\begin{array}{ccc} (F \circ \Delta_r \circ Y)(\emptyset) & \xrightarrow{\cong} & Z(\emptyset) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{holim}_{\emptyset \neq K \in \mathcal{P}(\langle n+1 \rangle)} (F \circ \Delta_r \circ Y)(K) & \xrightarrow{\cong} & \operatorname{holim}_{\emptyset \neq K \in \mathcal{P}(\langle n+1 \rangle)} Z(K) \end{array}$$

を用いれば、右の縦が弱同値、つまり  $Z$  が Cartesian であることを示せばよいことが分かる。そのためには、Covering Lemma で

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \{(L_1, \dots, L_r) \mid L_i \in \mathcal{P}(\langle n+1 \rangle), |\langle n+1 \rangle - L_i| \leq n_i\} \\ \mathcal{X}_j &= \{(L_1, \dots, L_r) \mid j \in L_1 \cup \dots \cup L_r\} \end{aligned}$$

とおけばよい。  $\square$

Proposition 5.2.3 の証明のためには次が必要である。

**Lemma 5.2.5.**  $n$  変数ホモトピー関手  $F$  が  $(1, \dots, 1)$ -reduced ならば, 図式

$$\begin{array}{ccc} F \circ \Delta_n & \xrightarrow{t_{n-1}} & T_{n-1}(F \circ \Delta_n) \\ & \searrow & \nearrow \\ & G & \end{array}$$

を可換にする  $G$  で, 任意の  $X$  に対し  $G(X) \underset{w}{\simeq} *$  であるものが存在する。

*Proof.*  $\mathcal{P}(\langle n \rangle)^n$  の full subcategory  $\mathcal{E}$  と  $\mathcal{E}^*$  を

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \{(K_1, \dots, K_n) \in (\mathcal{P}(\langle n \rangle) - \emptyset)^n \mid s \in K_s \text{ for some } s\} \\ \mathcal{E}^* &= \{(K_1, \dots, K_n) \in (\mathcal{P}(\langle n \rangle) - \emptyset)^n \mid K_s = \{s\} \text{ for some } s\} \end{aligned}$$

により定義する。これらを用いると  $t_{n-1}$  は次の合成に分解できる

$$\begin{aligned} F \circ \Delta_n(X) &= F(X, \dots, X) \\ &= F(X *_B S(\emptyset), \dots, X *_B S(\emptyset)) \\ &\longrightarrow \operatorname{holim}_{(K_1, \dots, K_n) \in \mathcal{E}} F(X *_B S(K_1), \dots, X *_B S(K_n)) \\ &\longrightarrow \operatorname{holim}_{\emptyset \neq K \in \mathcal{P}} F(X *_B S(K), \dots, X *_B S(K)) \\ &= \operatorname{holim}_{\emptyset \neq K \in \mathcal{P}} F \circ \Delta_n(X *_B S(K)) \\ &= T_{n-1}(F \circ \Delta_n)(X) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i &= \{(K_1, \dots, K_n) \in (\mathcal{P}(\langle n \rangle) - \emptyset)^n \mid i \in K_i\} \\ \mathcal{E}_i^* &= \{(K_1, \dots, K_n) \in (\mathcal{P}(\langle n \rangle) - \emptyset)^n \mid K_i = \{i\}\} \end{aligned}$$

と定義すると inclusion

$$\mathcal{E}_i^* \hookrightarrow \mathcal{E}$$

は left cofinal である。それは

$$\mathcal{E}_i^* \times_{\mathcal{E}_i} (\mathcal{E}_i \downarrow \mathbf{K}) = \{\mathbf{L} \rightarrow \mathbf{K} \mid \mathbf{L} \in \mathcal{E}_i^*\}$$

が terminal object を持つことから分かる。よって Theorem 2.3.8 より弱同値

$$\operatorname{holim}_{\mathbf{K} \in \mathcal{E}_i} F(X *_B S(K_1), \dots, X *_B S(K_n)) \xrightarrow{\simeq} \operatorname{holim}_{\mathbf{K} \in \mathcal{E}_i^*} F(X *_B S(K_1), \dots, X *_B S(K_n))$$

を得る。いくつかの共通部分  $\mathcal{E}_{i_1} \cap \dots \cap \mathcal{E}_{i_k}$  についても同様である。そして

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \bigcup_i \mathcal{E}_i \\ \mathcal{E}^* &= \bigcup_i \mathcal{E}_i^* \end{aligned}$$

は Covering Lemma の条件をみたしていることが分かるので, 自然な写像

$$\operatorname{holim}_{\mathbf{K} \in \mathcal{E}} F(X *_B S(K_1), \dots, X *_B S(K_n)) \xrightarrow{\simeq} \operatorname{holim}_{\mathbf{K} \in \mathcal{E}^*} F(X *_B S(K_1), \dots, X *_B S(K_n))$$

は弱同値を誘導することが分かる。

ところが  $\mathbf{K} = (K_1, \dots, K_n) \in \mathcal{E}^*$  ならば  $K_s = \{s\}$  となる  $s$  が存在するから,

$$X *_B S(K_s) \underset{w}{\simeq} *_B$$

であり  $F$  が各変数についてホモトピー関手であり, また 1-reduced であることから

$$F(X *_B S(K_1), \dots, X *_B S(K_n)) \underset{w}{\simeq} *$$

であることが分かる。よって

$$G(X) = \operatorname{holim}_{\mathbf{K} \in \mathcal{E}} F(X *_B S(K_1), \dots, X *_B S(K_n))$$

とおけばよい。 □

*Proof of Proposition 5.2.3.* 定義より

$$P_{n-1}(F \circ \Delta_n)(X) = \operatorname{hocolim}_i T_{n-1}^i F \circ \Delta_n(X)$$

であるが, 上の Lemma より図式

$$\begin{array}{ccccccc} F \circ \Delta_n(X) & \longrightarrow & T_{n-1}(F \circ \Delta_n)(X) & \longrightarrow & T_n^2(F \circ \Delta_n)(X) & \longrightarrow & \dots \\ & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \dots \\ & & G_1 & & G_2 & & \dots \end{array}$$

を可換にし, 任意の object  $X$  に対し

$$G_i(X) \underset{w}{\simeq} *$$

である  $G_i$  が存在する。よって

$$P_{n-1}(F \circ \Delta_n)(X) = \operatorname{hocolim}_i G_i(X) \underset{w}{\simeq} *$$

である。 □

Proposition 5.2.2 と Proposition 5.2.3 から次を得る。

**Corollary 5.2.6.**  $F$  が  $n$  重線形ならば  $F \circ \Delta_n$  は  $n$ -homogeneous である。

多重線形と言えは行列式を思い出す。よって変数の入れ替えをやりたくなる。もちろん一般に多変数関手について変数の置換は自然な操作である。

**Definition 5.2.7.**  $n$  変数関手

$$F : \mathcal{C}^n \longrightarrow \mathcal{D}$$

は, 任意の  $\sigma \in \Sigma_n$  に対し自然な morphism

$$F(\sigma) : F(X_1, \dots, X_n) \longrightarrow F(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)})$$

で

$$\begin{aligned} F(\sigma\tau) &= F(\tau) \circ F(\sigma) \\ F(1) &= 1 \end{aligned}$$

をみたすもの存在するとき symmetric という。

$F$  が symmetric ならば  $F(X, \dots, X) = F \circ \Delta_n(X)$  には  $\Sigma_n$  が右から作用していることが分かる。ホモトピー論では群の作用を調べるときには次のようなものを使う。

**Definition 5.2.8.** 群  $G$  を object が一つ  $*$  で morphism の集合が  $G$  である圏と同一視する。このとき  $G$  の空間  $X$  への作用とは関手

$$X : G \longrightarrow \mathbf{Spaces}$$

のことであり、空間の図式とみなすことができる。この図式のホモトピー (余) 極限を

$$\begin{aligned} X_{hG} &= \operatorname{hocolim}_G X \\ X^{hG} &= \operatorname{holim}_G X \end{aligned}$$

と書き、それぞれ homotopy orbit space, homotopy fixed point set という。

**Exercise 5.2.9.** 次の同相があることを確かめよ。

$$\begin{aligned} X_{hG} &\cong EG \times_G X \\ X^{hG} &\cong \operatorname{Map}_G(EG, X) \end{aligned}$$

ただし  $EG$  は Definition 2.3.10 で定義された空間である。

Taylor tower の第  $n$  層を可微分関数の Taylor 展開の  $n$  次項と類似の形に書き表わすために、この homotopy orbit space の構成を用いたい。しかしながら位相空間の圏では homotopy colimit と fibration はあまり相性が良くない。まずスペクトラムの圏に値を持つ関手で考える。ここで EKMM のスペクトラム [EKMM97] の圏 **Spectra** でも homotopy orbit space や homotopy fixed point の構成ができることに注意する。

**Proposition 5.2.10.** *Symmetric multilinear functor*

$$F : \mathcal{C}^n \longrightarrow \mathbf{Spectra}$$

に対し

$$\tilde{\Delta}_n(F)(X) = (F \circ \Delta_n)(X)_{h\Sigma_n}$$

で定義される関手

$$\mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Spectra}$$

は  $n$ -homogeneous である。

*Proof.* **Spectra** では

$$\operatorname{hofiber}(X \xrightarrow{f} Y) \simeq_{\omega} \Sigma^{-1} \operatorname{hocofiber}(X \xrightarrow{f} Y)$$

であることから分かる。 □

このように functor の間の対応を考えるために以下の記号を用いる:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_n(\mathcal{C}, \mathcal{D}) &= n\text{-homogeneous functor } F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D} \text{ の成す圏} \\ \mathcal{L}_n(\mathcal{C}, \mathcal{D}) &= \text{symmetric multilinear functor } F : \mathcal{C}^n \longrightarrow \mathcal{D} \text{ の成す圏} \end{aligned}$$

上の Proposition より次の図式ができる:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_n(\mathcal{C}, \mathbf{Spectra}) & \xrightarrow{\tilde{\Delta}_n} & \mathcal{H}_n(\mathcal{C}, \mathbf{Spectra}) \\ \downarrow \Omega^\infty & & \downarrow \Omega^\infty \\ \mathcal{L}_n(\mathcal{C}, \mathbf{Spaces}_*) & & \mathcal{H}_n(\mathcal{C}, \mathbf{Spaces}_*) \end{array}$$

ここで  $\Omega^\infty$  はスペクトラムに associate した無限ループ空間を取る関手である。

今, ホモトピー関手

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Spaces}_*$$

に対し, Taylor tower の第  $n$  層  $D_n F$  は  $\mathcal{H}_n(\mathcal{C}, \mathbf{Spaces}_*)$  の object である。上の図式でそれに対応する  $\mathcal{L}_n(\mathcal{C}, \mathbf{Spaces}_*)$  を作るために, まず  $\Omega^\infty$  の逆を考える。

$$\Omega^\infty : \mathcal{L}_n(\mathcal{C}, \mathbf{Spaces}_*) \longrightarrow \mathcal{L}_n(\mathcal{C}, \mathbf{Spectra})$$

の逆は簡単に作るすることができる。

**Proposition 5.2.11.** 関手

$$B^\infty : \mathcal{L}_n(\mathcal{C}, \mathbf{Spectra}) \longrightarrow \mathcal{L}_n(\mathcal{C}, \mathbf{Spaces}_*)$$

で自然な弱同値

$$\begin{aligned} \Omega^\infty B^\infty F(X) &\underset{w}{\simeq} F(X) \\ B^\infty \Omega^\infty G(X) &\underset{w}{\simeq} G(X) \end{aligned}$$

を持つものが存在する。

*Proof.*  $F$  が  $n$  重線形ということは  $F(X_1, \dots, X_n)$  が各変数について 1-excisive, つまり cofibration を quasifibration に写す (Example 3.2.25) ということである。よって

$$\Omega^{k_1 + \dots + k_n} F(\Sigma^{k_1} X_1, \dots, \Sigma^{k_n} X_n) \underset{w}{\simeq} F(X_1, \dots, X_n)$$

である。そこで  $B^\infty F(X_1, \dots, X_n)$  を

$$\begin{aligned} B^0 F(X_1, \dots, X_n) &= F(X_1, \dots, X_n), \\ B^1 F(X_1, \dots, X_n) &= F(\Sigma X_1, \dots, X_n), \\ B^2 F(X_1, \dots, X_n) &= F(\Sigma^2 X_1, \dots, X_n), \\ &\vdots \end{aligned}$$

に associate した EKMM のスペクトラムとすればよい。 □

$n$ -homogeneous functor の間の対応

$$\Omega^\infty : \mathcal{H}_n(\mathcal{C}, \mathbf{Spaces}_*) \longrightarrow \mathcal{H}_n(\mathcal{C}, \mathbf{Spectra})$$

の逆を作るのはちょっと面倒である。鍵となるのは次の事実である。

**Lemma 5.2.12.** 1-reduced functor

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Spaces}_*$$

に対し,  $n$ -homogeneous functor

$$BD_n F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Spaces}_*$$

で  $D_n F$  の delooping を与えるもの, つまり自然な弱同値

$$\Omega B D_n F(X) \underset{w}{\simeq} D_n F(X)$$

を持つもの, が存在する。

*Proof.*  $D_n F$  は  $P_n F$  から  $P_{n-1} F$  への morphism の homotopy fiber として定義されていた。そこで  $P_n F$  の定義、よって  $T_n^i F$  の定義に戻って  $BD_n F$  を構成する。

まず

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_n &= \mathcal{P}(\langle n+1 \rangle) - \{\emptyset, \{n+1\}\} \\ \mathcal{A}_{n,i} &= (\mathcal{P}(\langle n+1 \rangle) - \{\emptyset\})^i - (\mathcal{P}(\langle n \rangle) - \{\emptyset\})^i\end{aligned}$$

と定義する。部分圏の包含から得られる図式

$$\begin{array}{ccc}(\mathcal{P}(\langle n+1 \rangle) - \{\emptyset\})^i & \longleftarrow & \mathcal{B}_n^i \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{A}_{n,i} & \longleftarrow & \mathcal{A}_{n,i} \cap \mathcal{B}_n^i\end{array}$$

を考える。 $(\mathcal{P}(\langle n+1 \rangle) - \{\emptyset\})^i$  の合成可能な morphism の列

$$(K_1^{(0)}, \dots, K_i^{(0)}) \longrightarrow (K_1^{(1)}, \dots, K_i^{(1)}) \longrightarrow \dots \longrightarrow (K_1^{(j)}, \dots, K_i^{(j)})$$

について、最初の  $K_1^{(0)}$  から  $K_i^{(0)}$  の中に  $\{n+1\}$  がなければ全て  $\mathcal{B}_n^i$  の morphism であるし、 $K_\ell^{(0)} = \{n+1\}$  であれば

$$K_\ell^{(1)}, K_\ell^{(2)}, \dots, K_\ell^{(j)}$$

は全て  $n+1$  を含み、よって  $\mathcal{A}_{n,i}$  の morphism の列である。これで Covering Lemma (Theorem 2.2.42) の条件が満たされることが分かり Cartesian diagram

$$\begin{array}{ccc}T_n^i F(X) & \longrightarrow & S_{n-1}^i F(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_{n,i} F(X) & \longrightarrow & R_{n,i} F(X)\end{array}$$

を得る。ここで

$$\begin{aligned}S_{n-1} F(X) &= \operatorname{holim}_{K \in \mathcal{B}_n} F(X *_B S(K)) \\ K_{n,i} F(X) &= \operatorname{holim}_{(K_1, \dots, K_i) \in \mathcal{A}_{n,i}} F(X *_B S(K_1 \times \dots \times K_i)) \\ R_{n,i} F(X) &= \operatorname{holim}_{(K_1, \dots, K_i) \in \mathcal{A}_{n,i} \cap \mathcal{B}_n^i} F(X *_B S(K_1 \times \dots \times K_i))\end{aligned}$$

である。

まず  $K_{n,i} F(X)$  が可縮であることを示そう。そのためにより小さな圏上のホモトピー極限に帰着させる。実際

$$(\mathcal{P}(\langle n+1 \rangle) - \{\emptyset\})^i - \mathcal{B}_n^i \hookrightarrow \mathcal{A}_{n,i}$$

は Theorem 2.3.8 の条件をみたすから弱同値

$$\operatorname{holim}_{(K_1, \dots, K_i) \in (\mathcal{P}(\langle n+1 \rangle) - \{\emptyset\})^i - \mathcal{B}_n^i} F(X *_B S(K_1 \times \dots \times K_i)) \xrightarrow[\cong]{w} K_{n,i} F(X)$$

を得る。ところが圏  $(\mathcal{P}(\langle n+1 \rangle) - \{\emptyset\})^i - \mathcal{B}_n^i$  の object  $(K_1, \dots, K_i)$  はどれかの  $K_s$  が  $\{n+1\}$  であるものであり、

$$X *_B S(K_1 \times K_i) = C_B(X *_B S(K_1 \times \dots \times K_{s-1} \times \dots \times K_i)) \underset{w}{\simeq} B$$

となる。\$F\$ が reduced であることとホモトピー関手であることから

$$F(X *_B S(K_1 \times K_i)) \underset{w}{\simeq} F(B) \underset{w}{\simeq} *$$

であり

$$K_{n,i}F(X) \underset{w}{\simeq} \operatorname{holim}_{(K_1, \dots, K_i) \in \mathcal{P}(\langle n+1 \rangle - \{\emptyset\})^i - B_n^i} F(X *_B S(K_1 \times \dots \times K_i)) \underset{w}{\simeq} *$$

となる。これで homotopy pullback diagram

$$\begin{array}{ccc} T_n^i F(X) & \longrightarrow & S_{n-1}^i F(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & R_{n,i} F(X) \end{array}$$

よって quasifibration

$$T_n^i F(X) \longrightarrow S_{n-1}^i F(X) \longrightarrow R_{n,i} F(X)$$

を得た。Homotopy fiber と sequential homotopy colimit が可換であることから, quasifibration

$$P_n F(X) \longrightarrow \operatorname{hocolim}_i S_{n-1}^i F(X) \longrightarrow \operatorname{hocolim}_i R_{n,i} F(X)$$

を得る。更に

$$\mathcal{P}(\langle n \rangle) - \{\emptyset\} \hookrightarrow \mathcal{P}(\langle n+1 \rangle) - \{\emptyset, \{n+1\}\}$$

が Theorem 2.3.8 の条件をみたすことも分かり, 弱同値

$$T_{n-1}^i F(X) \underset{w}{\simeq} S_{n-1}^i F(X)$$

が分かる。よって

$$BD_n F(X) = \operatorname{hocolim}_i R_{n,i} F(X)$$

と定義すれば弱同値

$$\begin{aligned} D_n F(X) &= \operatorname{hofiber}(P_n F(X) \longrightarrow P_{n-1} F(X)) \\ &\underset{w}{\simeq} \Omega BD_n F(X) \end{aligned}$$

を得る。 □

**Corollary 5.2.13.** 関手

$$B^\infty : \mathcal{H}_n(\mathcal{C}, \mathbf{Spectra}) \longrightarrow \mathcal{H}_n(\mathcal{C}, \mathbf{Spaces}_*)$$

で自然な弱同値

$$\begin{aligned} \Omega^\infty B^\infty F(X) &\underset{w}{\simeq} F(X) \\ B^\infty \Omega^\infty G(X) &\underset{w}{\simeq} G(X) \end{aligned}$$

を持つものが存在する。

*Proof.* \$F \in \mathcal{H}\_n(\mathcal{C}, \mathbf{Spaces}\_\*)\$ に対し \$B^\infty F(X)\$ を

$$B^0 D_n F(X), B^1 D_n F(X), \dots$$

に associate したスペクトラムと定義すればよい。 □

次に \$\tilde{\Delta}\_n\$ の逆を作るのであるが, それは cross effect と呼ばれる構成である。次節でその構成を詳しくみることにしよう。

### 5.3 Cross Effect

Cross effect を理解するためには、関数で対応する概念を考えてみるとよい。 $n$  次の同次多項式  $f(x)$  に対応した  $n$  重線形写像を作るにはどうすればよいだろう。

ちょっと計算してみると

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2)^2 - x_1^2 - x_2^2 &= 2x_1x_2 \\ (x_1 + x_2 + x_3)^3 - (x_1 + x_2)^2 - (x_2 + x_3)^2 - (x_3 + x_1)^2 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 &= 6x_1x_2x_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

となることが分かる。一般に  $f(x) = x^n$  に対し

$$f\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) - \sum_{\emptyset \neq K \subset \langle n \rangle} (-1)^{|K|} f\left(\sum_{i \notin K} x_i\right) = n!x_1 \cdots x_n$$

である。ここで和と wedge, 差と homotopy fiber が対応していること, 更に total homotopy fiber は homotopy fiber の homotopy fiber であることを考えると, 上記の式の左辺の空間の間の関手での類似は

$$\text{hofiber}\left(F(X_1 \vee \cdots \vee X_n) \longrightarrow \text{holim}_{\emptyset \neq K \in \mathcal{P}(n)} F\left(\bigvee_{i \notin K} X_i\right)\right)$$

である。ここで

$$K \longmapsto \bigvee_{i \notin K} X_i$$

は空間の cubical diagram であることに注意する。

**Definition 5.3.1.** ホモトピー関手

$$F : (\mathbf{Spaces} \downarrow B)_* \longrightarrow \mathcal{C}$$

に対し

$$\text{cr}_n F : (\mathbf{Spaces} \downarrow B)_*^n \longrightarrow \mathcal{C}$$

$$\text{cr}_n F(X_1, \dots, X_n) = \text{hofiber}\left(F(X_1 \vee \cdots \vee X_n) \longrightarrow \text{holim}_{\emptyset \neq K \in \mathcal{P}(n)} F\left(\bigvee_{i \notin K} X_i\right)\right)$$

と定義する。これを  $F$  の cross effect という。

Cross effect の基本的な性質は以下のものである。

**Proposition 5.3.2.**  $F$  が  $n$ -excisive ならば  $0 \leq m \leq n$  に対し  $\text{cr}_{m+1} F$  は  $(n-m)$ -excisive である。特に  $\text{cr}_n F$  は symmetric multilinear であり  $\text{cr}_{n+1} F$  は 0-excisive かつ reduced つまり trivial である。

**Proposition 5.3.3.**  $F$  が  $n$ -homogeneous ならば次の自然な弱同値がある。

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_n(\text{cr}_n F)(X) &\underset{w}{\simeq} F(X) \\ \text{cr}_n(\tilde{\Delta}_n G)(X_1, \dots, X_n) &\underset{w}{\simeq} G(X_1, \dots, X_n) \end{aligned}$$

$D_n F(X)$  は  $n$ -homogeneous であるから

$$\begin{aligned} D_n F(X) &\underset{w}{\simeq} \Omega^\infty B^\infty D_n F(X) \\ &\underset{w}{\simeq} \Omega^\infty \tilde{\Delta}_n \text{cr}_n B^\infty D_n F(X) \\ &= \Omega^\infty ((\text{cr}_n B^\infty D_n F)(X, \dots, X)_{h\Sigma_n}) \\ &\underset{w}{\simeq} \Omega^\infty ((B^\infty \text{cr}_n D_n F)(X, \dots, X)_{h\Sigma_n}) \end{aligned}$$

となる。

ここで  $B^\infty \text{cr}_n D_n(F)$  は spectrum の圏に値を持つ multilinear functor であるが、そのような functor は  $S^0$  の値で決まる。

**Proposition 5.3.4.** *Multilinear* であるホモトピー関手

$$F : (\mathbf{Spaces} \downarrow B)_*^n \longrightarrow \mathcal{C}$$

に対し

$$C_F = F(S^0, \dots, S^0)$$

とおく。すると任意の有限 CW 複体  $X_1, \dots, X_n$  に対し

$$F(X_1, \dots, X_n) \underset{w}{\simeq} C_F \wedge X_1 \wedge \dots \wedge X_n$$

である。

*Proof.* 各変数について

$$X_i \longmapsto \pi_*(F(X_1, \dots, X_n))$$

がホモロジー論になることから分かる。 □

**Remark 5.3.5.** 上の Proposition は、 $F$  が filtered homotopy colimit と可換ならば、任意の空間に対して成り立つ。

以上のことから、Taylor tower の第  $n$  層  $D_n F$  を調べるためには spectrum  $B^\infty \text{cr}_n D_n F(S^0, \dots, S^0)$  を求めればよいことが分かる。更に  $D_n F$  の cross effect については次のことが分かる。

**Proposition 5.3.6.** ホモトピー関手

$$F : \mathbf{Spaces}_* \longrightarrow \mathcal{C}$$

に対し、次の自然な弱同値がある。

$$\text{cr}_n D_n F(X_1, \dots, X_n) \underset{w}{\simeq} (P_{(1, \dots, 1)}(\text{cr}_n F))(X_1, \dots, X_n)$$

ここで  $P_{(1, \dots, 1)}$  は Definition 5.2.1 で定義されたものである。

この結果は、ホモトピー関手  $F$  の Taylor tower の第  $n$  層を求めるためには、 $F$  の cross effect を取り、その multilinearization を求めればよい、ということを意味している。

次節では、この事実を用いて実際に Taylor tower の layer を求めてみることにする。

## 5.4 計算例

Cross effect の計算例として identity functor

$$1 : \mathbf{Spaces}_* \longrightarrow \mathbf{Spaces}_*$$

を考えよう。

Example 3.2.28 より,  $X$  が  $k$  連結 ( $k \geq 2$ ) なら Taylor tower が収束し

$$X \simeq \operatorname{holim}_w \operatorname{holim}_n P_n F(X)$$

となる。よって

$$D_1 1(X), D_2 1(X), \dots, D_n 1(X)$$

が分かれると  $P_n 1(X)$  が分かりよって  $X$  の情報を得る。ここで  $D_i 1(X)$  は無限ループ空間, よって spectrum と思ってよい。Spectrum のホモトピー圏は安定ホモトピー圏と呼ばれるもので, triangulated category になり非常に代数的な扱いができる。その情報から位相空間  $X$  についての情報が得られると言っているのである。これまでのホモトピー論では suspension spectrum を取る

$$\Sigma^\infty : \mathbf{Spaces}_* \longrightarrow \mathbf{Spectra}$$

という関手を用いて位相空間を「安定化」させて調べることはあったが, 安定ホモトピー圏の情報から非安定ホモトピー圏 (通常の位相空間のホモトピー圏) の情報を得ることは考えられなかった。Identity functor の Taylor tower の第  $n$  層  $D_n 1(X)$  達が  $X$  についての情報を全て持っている, というのは驚くべきことである。

さて  $n = 1, 2, 3, \dots$  に対し  $D_n 1(X)$  がどういうものになるか考えていこう。

$n = 1$  のときは簡単である。一般の 1-reduced ホモトピー関手  $F$  に対し  $D_1 F$  を求めることができる。定義より  $F$  が 1-reduced ( $F(*) \simeq_w *$ ) ならば

$$\begin{aligned} D_1 F(X) &= \operatorname{hofiber}(P_1 F(X) \longrightarrow P_0 F(X)) \\ &= \operatorname{hofiber}(P_1 F(X) \longrightarrow F(*)) \\ &\simeq_w \operatorname{hofiber}(P_1 F(X) \longrightarrow *) \\ &= P_1 F(X) \\ &= \operatorname{hocolim}_i T_1^i F(X) \end{aligned}$$

となる。一般に

$$\begin{aligned} T_1 F(X) &= \operatorname{holim}_{\emptyset \neq K \subset \mathcal{P}(\{2\})} F(X * K) \\ &= \operatorname{holim} \left( \begin{array}{ccc} & & F(X * \{2\}) \\ & & \downarrow \\ F(X * \{1\}) & \longrightarrow & F(X * \{1, 2\}) \end{array} \right) \\ &= \operatorname{holim} \left( \begin{array}{ccc} & & F(CX) \\ & & \downarrow \\ F(CX) & \longrightarrow & F(\Sigma X) \end{array} \right) \end{aligned}$$

であるが  $F$  が 1-reduced なホモトピー関手ならば

$$F(CX) \simeq_w F(*) \simeq_w *$$

であり

$$\begin{aligned} T_1 F(X) &\underset{w}{\simeq} \operatorname{holim} \left( \begin{array}{ccc} & & * \\ & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & F(\Sigma X) \end{array} \right) \\ &= \Omega F(\Sigma X) \end{aligned}$$

となる。よって 1-reduced ホモトピー関手  $F$  に対して

$$D_1 F(X) = P_1 F(X) = \operatorname{hocolim}_i \Omega^i F(\Sigma^i X)$$

となる。特に identity functor に対しては

$$D_1 1(X) = \Omega^\infty \Sigma^\infty X = \Omega^\infty (\Sigma^\infty(S^0) \wedge X)$$

である。よって cross effect, つまり 1 次の微分係数は sphere spectrum  $\Sigma^\infty(S^0)$  である。

$n \geq 2$  のときは少し面倒になる。

Proposition 5.3.6 より  $\operatorname{cr}_2 1(X_1, X_2)$  を求めればよいが, cross effect の定義より

$$\begin{aligned} \operatorname{cr}_2 1(X_1, X_2) &= \operatorname{hofiber} \left( X_1 \vee X_2 \longrightarrow \operatorname{holim} \left( \begin{array}{ccc} & & X_2 \\ & & \downarrow \\ X_1 & \longrightarrow & * \end{array} \right) \right) \\ &= \operatorname{hofiber}(X_1 \vee X_2 \hookrightarrow X_1 \times X_2) \end{aligned}$$

となる。よって

$$(P_{(1,1)} \operatorname{cr}_2 1)(X_1, X_2) = \operatorname{hocolim}_{i_1, i_2} \Omega^{i_1+i_2} (\operatorname{hofiber} (\Sigma^{i_1} X_1 \vee \Sigma^{i_2} X_2 \hookrightarrow (\Sigma^{i_1} X) \times (\Sigma^{i_2} X)))$$

となるが  $Y_1$  と  $Y_2$  がそれぞれ  $k_1$  連結と  $k_2$  連結のとき, ホモトピー切除定理より, 大雑把に言えば  $i \leq 3 \min\{k_1, k_2\}$  ぐらいまでで

$$\pi_i(\operatorname{hofiber}(X_1 \vee X_2 \hookrightarrow X_1 \times X_2)) \cong \pi_i(\Omega \operatorname{hofiber}(X_1 \vee X_2 \hookrightarrow X_1 \times X_2)) = \pi_i(\Omega(X_1 \wedge X_2))$$

である。よって

$$\begin{aligned} P_{(1,1)} \operatorname{cr}_2 1(X_1, X_2) &\underset{w}{\simeq} \operatorname{hocolim}_{i_1, i_2} \Omega^{i_1+i_2+1} (\Sigma^{i_1} X_1 \wedge \Sigma^{i_2} X_2) \\ &= \Omega^\infty (\Sigma^{\infty-1} (X_1 \wedge X_2)) \\ &= \Omega^\infty (S^{-1} \wedge X_1 \wedge X_2) \end{aligned}$$

となる。ここで  $S^{-1}$  は sphere spectrum を一回 desuspend した spectrum である。よって

$$D_2 1(X) \underset{w}{\simeq} \Omega^\infty ((S^{-1} \wedge X_1 \wedge X_2)_{h\Sigma_2})$$

となる。

一般の  $n$  について  $D_n 1(X)$  を求めるときのアイデアもこの  $n = 2$  のときの計算が元になっている。それを最初に考えたのが Brenda Johnson [Joh95] である。その後, Arone と Dwyer [AD01] によりより詳しい情報が分かっているが, ここでは Johnson の方法を紹介しよう。

出発点はホモトピー極限の定義である。例えば空間の 2-cube  $X$  に対し

$$\text{hofiber} \left( X(\emptyset) \longrightarrow \text{holim} \left( \begin{array}{c} X(\{1\}) \\ \downarrow \\ X(\{2\}) \longrightarrow X(\{1, 2\}) \end{array} \right) \right) \subset \prod_{K \in \mathcal{P}(\{2\})} \text{Map}(I^{|K|}, X(K))$$

である。一般に cross effect  $\text{cr}_n 1(X_1, \dots, X_n)$  の元は

$$f_K : I^{|K|} \longrightarrow \bigvee_{i \neq K} X_i$$

により  $(f_K)_{K \in \mathcal{P}(\{n\})}$  と表わされるはずである。 $n = 2$  のときを思い出し、まずは  $X_i$  達の直積、そして wedge に持つていく。

**Definition 5.4.1.** 写像

$$T'_n : \text{cr}_n 1(X_1, \dots, X_n) \longrightarrow \text{Map}(\underbrace{I^{n-1} \times \dots \times I^{n-1}}_n, X_1 \times \dots \times X_n)$$

を

$$T'_n((f_K)_{K \in \mathcal{P}(\{n\})})(t_1, \dots, t_n) = ((f_{\{n\}-\{1\}})(t_1), \dots, f_{\{n\}-\{n\}})(t_n))$$

で定義する。また wedge への射影から誘導された写像を合成したものを

$$T''_n : \text{cr}_n 1(X_1, \dots, X_n) \longrightarrow \text{Map}(I^{n(n-1)}, X_1 \wedge \dots \wedge X_n)$$

とおく。

もちろん  $T''_n$  は非常に粗い近似である。これを弱同値に近づけるために、Johnson は任意の  $\varphi \in \text{Im } T''_n$  に対し  $\varphi(W) = *$  となる  $W \subset I^{n(n-1)}$  を見付けることを考えた。そのために

$$I^{n(n-1)} = \left\{ \left( \begin{array}{ccc} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & \cdots & t_{nn} \end{array} \right) \middle| t_{11} = \cdots = t_{nn} = 0 \right\}$$

とみなす。そして  $1 \leq i < j \leq n$  に対し

$$\begin{aligned} W_{ij} &= \{ \mathbf{t} \in I^{(n-1)n} \mid t_{ik} = t_{jk} \text{ for all } k \} \\ Z &= \{ \mathbf{t} \in I^{(n-1)n} \mid t_{ij} = 0 \text{ for some } i, j \} \end{aligned}$$

とおく。

**Lemma 5.4.2.** 任意の  $\varphi \in \text{Im } T''_n$  に対し

$$\varphi \left( \bigcup_{i < j} W_{ij} \cup Z \right) = *$$

となる。

そこで

$$J_n = I^{n(n-1)} / \cup_{i < j} W_{ij} \cup Z$$

とおき  $T_n''$  から誘導された写像

$$T_n : \text{cr}_n 1(X_1, \dots, X_n) \longrightarrow \text{Map}_*(J_n, X_1 \wedge \dots \wedge X_n)$$

を考える。

**Lemma 5.4.3.**  $I^{n(n-1)} = \underbrace{I^{n-1} \times \dots \times I^{n-1}}_n$  とみなして  $\Sigma_n$  の作用を考えると、 $\cup_{i < j} W_{ij} \cup Z$  は  $\Sigma_n$  不変な部分空間である。

Johnson は以下を示した。

**Proposition 5.4.4.**  $T_n$  について以下が成り立つ:

1.  $T_n$  は  $\Sigma_n$ -equivariant である。
2.  $X_1, \dots, X_n$  が  $k$  連結ならば

$$\Omega T_n : \Omega \text{cr}_n 1(\Sigma X_1, \dots, \Sigma X_n) \longrightarrow \Omega \text{Map}_*(J_n, \Sigma X_1 \wedge \dots \wedge \Sigma X_n)$$

は  $\{(n+1)(k+1) - 1\}$  連結である。

よって  $\Sigma_n$ -equivariant な弱同値

$$\Omega^{\infty+1} \text{cr}_n 1(\Sigma^{\infty+1} X_1, \dots, \Sigma^{\infty+1} X_n) \xrightarrow{\cong} \Omega^{\infty+1} \text{Map}_*(J_n, \Sigma^{\infty+1} X_1 \wedge \dots \wedge \Sigma^{\infty+1} X_n)$$

を得る。このことから  $\Sigma_n$ -equivariant な弱同値

$$B^\infty \text{cr}_n D_n 1(X_1, \dots, X_n) \underset{w}{\cong} \text{Map}_*(J_n, \Sigma^\infty X_1 \wedge \dots \wedge \Sigma^\infty X_n)$$

を得る。よって

$$\begin{aligned} D_n 1(X) &\underset{w}{\cong} \Omega^\infty (\text{Map}_*(J_n, \Sigma^\infty X^{\wedge n})_{h\Sigma_n}) \\ &= \Omega^\infty ((\text{Map}_*(J_n, \Sigma^\infty(S^0)) \wedge X^{\wedge n})_{h\Sigma_n}) \end{aligned}$$

となる。つまり identity functor の  $n$  階微分係数は有限複体  $J_n$  の  $S$ -dual である。

# Chapter 6

## Weiss の orthogonal calculus

関手の微分を行なう際に、ホモトピー (余) 極限ではなく本当の極限を使ってもよい場合がある。位相空間の圏でホモトピー (余) 極限を使わなければならなかったのは、(余) 極限がホモトピーと相性が良くなかったからである。よって弱同値が isomorphism であるようなモデル圏ならば、ホモトピー (余) 極限ではなく本当の (余) 極限で議論してもよさそうである。そのような例として、この章では Weiss の orthogonal calculus をとりあげる。ただし、定義域の圏でホモトピー (余) 極限を用いる必要がない代わりに値域の圏で位相圏上のホモトピー (余) 極限を取る必要が出てくるのであるが。

### 6.1 位相圏とその上で定義された関手のホモトピー (余) 極限

§2.2 で定義したホモトピー (余) 極限は、定義域が位相圏の場合に拡張できる。まず位相圏の定義を復習しよう。

**Definition 6.1.1.**  $\mathcal{C}$  を small category とする。

$\mathcal{C}$  の morphism の集合  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}$  と object の集合  $\text{ob}(\mathcal{C})$  に位相が入っていて、圏の structure map

$$s : \text{Mor}_{\mathcal{C}} \longrightarrow \text{ob}(\mathcal{C}) \quad (6.1)$$

$$t : \text{Mor}_{\mathcal{C}} \longrightarrow \text{ob}(\mathcal{C}) \quad (6.2)$$

$$\circ : \text{Mor}_{\mathcal{C}} \times_{\text{ob}(\mathcal{C})} \text{Mor}_{\mathcal{C}} \longrightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}} \quad (6.3)$$

$$\iota : \text{ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}} \quad (6.4)$$

が全て連続であるとき  $\mathcal{C}$  を位相圏という。

位相圏に対しても分類空間の構成はそのまま適用できる。ただし nerve に部分空間

$$N_q(\mathcal{C}) \subset \underbrace{\text{Mor}_{\mathcal{C}} \times_{\text{ob}(\mathcal{C})} \cdots \times_{\text{ob}(\mathcal{C})} \text{Mor}_{\mathcal{C}}}_q$$

として位相を入れる。

位相空間の圏のように、小圏ではないが二つの object 間の morphism の集合に自然に位相が入るものがある。つまり位相空間の圏で enrich された圏である。位相圏からこのような圏への関手には連続性を仮定するのが自然だろう。

**Definition 6.1.2.**  $\mathcal{C}$  を位相圏とする。関手

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Spaces}_*$$

は任意の object  $C, D$  に対し

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(C, D) \longrightarrow \text{Map}_{\mathbf{Spaces}_*}(F(C), F(D))$$

の adjoint

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(C, D) \wedge F(C) \longrightarrow F(D)$$

が連続のとき、連続関手と呼ばれる。

値域が  $\mathbf{Spaces}$ ,  $\mathbf{Spaces} \downarrow B$ ,  $(\mathbf{Spaces} \downarrow B)_*$  などの場合も同様である。

**Lemma 6.1.3.**  $\mathcal{C}$  が位相圏で

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Spaces}_*$$

が連続関手ならば, (2.3) により部分空間

$$\Omega^q(F) \subset \prod_{C \in \text{ob}(\mathcal{C})} \text{Map}(N_q(\mathcal{C} \downarrow C), F(C))$$

とみなしたとき,  $\Omega^*(F)$  は *cosimplicial space* になる。

**Definition 6.1.4.**  $\mathcal{C}$  を位相圏,

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Spaces}_*$$

を連続関手とする。上の Lemma のように位相を入れて  $\Omega^*(F)$  を *cosimplicial space* とみなしたとき,

$$\text{holim } F = \text{Tot}(\Omega^*(F))$$

と定義する。

$\text{hocolim } F$  についても同様である。

## 6.2 有限次元ベクトル空間の位相圏上の関手の微分

位相圏上の連続関手の calculus の例として, 内積を持つ有限次元ベクトル空間の成す圏  $\mathcal{F}$  上の関手を考える。体は実数または複素数どちらでもよいので  $\mathbb{F}$  で表わすことにする。 $\mathcal{F}$  は正確には以下で定義する。

**Definition 6.2.1.**  $H$  を可算次元 separable Hilbert space とする。 $H$  の有限次元部分空間を object とし, 内積を保つ線型写像を morphism とした圏を  $\mathcal{F}(H)$  とかく。 $H$  が明らかなき場合は単に  $\mathcal{F}$  と書く。

二つの object  $V, W \in \mathcal{F}$  に対し,  $V$  から  $W$  への morphism の集合を  $\text{mor}(V, W)$  で表わす。これに Stiefel 多様体として位相を入れる。Object の集合には discrete topology が入っているとして, これで  $\mathcal{F}$  を位相圏とみなす。

調べる対象は次のものである。

**Definition 6.2.2.**  $\mathcal{E}$  を  $\mathcal{F}$  から  $\mathbf{Spaces}_*$  への連続関手の成す圏とする。

Goodwillie calculus の真似をすると以下の定義を得る。

**Definition 6.2.3.**  $F \in \mathcal{E}$  に対し

$$T_n F = \text{holim}_{0 \neq U \subset \mathbb{F}^{n+1}} F(V \oplus U)$$

と定義する。自然変換

$$t_n : F \longrightarrow T_n F$$

がある。

**Definition 6.2.4.**  $F \in \mathcal{E}$  について

$$t_n : F(V) \longrightarrow T_n F(V)$$

が任意の  $V$  に対し弱同値であるとき,  $F$  は polynomial functor of degree  $\leq n$  であるという。

Weiss は  $\text{hofiber}(t_n)$  の具体的な記述を求めることにより  $T_n F$  を調べた。そのために Thom complex を用いる。

**Definition 6.2.5.**  $\mathcal{F}(H)$  の object  $V$  と  $W$  に対し

$$\gamma_n(V, W) \longrightarrow \text{mor}(V, W)$$

を  $\text{mor}(V, W)$  上の vector bundle で  $f \in \text{mor}(V, W)$  上の fiber が  $\underbrace{(\text{Im } f)^\perp \oplus \cdots \oplus (\text{Im } f)^\perp}_n$  であるものとする。

$\gamma_n(V, W)$  の Thom complex を  $\text{mor}_n(V, W)$  と定義する。

Vector bundle の準同型

$$\gamma_n(V, W) \times \gamma_n(U, V) \longrightarrow \gamma_n(U, W)$$

を

$$((f, w), (g, v)) \longmapsto (f \circ g, w + f_*(v))$$

で定義する。Thom complex の間に誘導された写像

$$\circ : \text{mor}_n(V, W) \wedge \text{mor}_n(U, V) \longrightarrow \text{mor}_n(U, W)$$

と書く。

この  $\circ$  を合成として位相圏ができることはすぐ分かる。

**Definition 6.2.6.** Object を  $\mathcal{F}(H)$  の object,  $V$  から  $W$  への morphism の成す空間を  $\text{mor}_n(V, W)$ , 合成を  $\circ$  とする位相圏を  $\mathcal{F}_n(H)$  または単に  $\mathcal{F}_n$  と書く。

また  $\mathcal{F}_n$  から  $\mathbf{Spaces}_*$  への連続関手の成す圏を  $\mathcal{E}_n$  とする。

$\gamma_n(V, W)$  の定義から分かるように,  $\mathcal{F}_n$  を扱う際には同じベクトル空間の  $n$  個の直和をとることが多い。そこで

$$nV = \underbrace{V \oplus \cdots \oplus V}_n$$

という記号を使うことにする。

**Definition 6.2.7.**  $f \in \text{mor}(V, W)$  に対し, ファイバーの間の写像

$$n(\text{Im } f)^\perp = n(\text{Im } f)^\perp \oplus 0 \hookrightarrow (n+1)(\text{Im } f)^\perp$$

から誘導される写像

$$\text{mor}_n(V, W) \hookrightarrow \text{mor}_{n+1}(V, W)$$

により  $\text{mor}_n(V, W)$  を  $\text{mor}_{n+1}(V, W)$  の部分空間とみなす。よって  $m < n$  に対し  $\mathcal{F}_m$  は  $\mathcal{F}_n$  の部分圏とみなすことができるが, その inclusion functor を

$$i_m^n : \mathcal{F}_m \hookrightarrow \mathcal{F}_n$$

と表わす。

また  $i_m^n$  から誘導された関手を

$$\text{res}_m^n : \mathcal{E}_n \longrightarrow \mathcal{E}_m$$

と書く。

Weiss は  $t_n$  の homotopy fiber が  $\text{res}_0^{n+1}$  の adjoint functor で表わされることを発見した。まず, その adjoint functor を定義しよう。

**Definition 6.2.8.**  $E \in \mathcal{E}_n$  に対し

$$(\text{ind}_m^n E)(V) = \text{nat}_m(\text{mor}_n(V, -), E)$$

と定義する。ここで  $\text{nat}_m$  は  $\mathcal{E}_m$  での morphism の成す集合である。

もちろん右辺は単なる集合である。  $\text{ind}_m^n E$  を連続関手

$$\text{ind}_m^n E : \mathcal{F}_n \longrightarrow \mathbf{Spaces}_*$$

とみなすためには,  $(\text{ind}_m^n E)(V)$  に位相を入れないといけない。

$$\text{ind}_m^n = \text{ind}_{n-1}^n \cdots \text{ind}_m^{m+1}$$

より  $(\text{ind}_m^{m+1} E)(V)$  に位相を入れればよいが

$$(\text{res}_m^{m+1} \text{ind}_m^{m+1} E)(V) = (\text{ind}_m^{m+1})(V)$$

であるから左辺の集合を考えればよい。

**Proposition 6.2.9.** 次の pullback の図式がある。

$$\begin{array}{ccc} \text{res}_m^{m+1} \text{ind}_m^{m+1} E(V) & \longrightarrow & P\Omega^{dm} E(\mathbb{F} \oplus V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E(V) & \xrightarrow{\text{ad}(\sigma_m)} & \Omega^{dm} E(\mathbb{F} \oplus V) \end{array} \quad (6.5)$$

ここで  $\sigma_n$  は以下で定義される写像である。

**Definition 6.2.10.** 標準的な包含

$$j : V \hookrightarrow \mathbb{F} \oplus V$$

は  $\text{mor}(V, \mathbb{F} \oplus V)$  の元である。  $j$  上の  $\gamma_n(V, \mathbb{F} \oplus V)$  のファイバーは  $F^n$  であるが、その total space への inclusion

$$\mathbb{F}^n \hookrightarrow \gamma_n(V, \mathbb{F} \oplus V)$$

から誘導される写像を

$$j_n : S^{dn} \hookrightarrow \text{mor}_n(V, \mathbb{F} \oplus V)$$

と書く。ただし  $d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F}$  である。そこで  $E \in \mathcal{E}_n$  に対し

$$S^{dn} \xrightarrow{j_n} \text{mor}_n(V, \mathbb{F} \oplus V) \xrightarrow{E} \text{Map}_*(E(V), E(\mathbb{F} \oplus V))$$

の合成の adjoint を

$$\sigma_n : E(V) \wedge S^{dn} \longrightarrow E(\mathbb{F} \oplus V)$$

と書き  $n$  次の suspension という。

また合成

$$\text{mor}_n(\mathbb{F} \oplus V, W) \wedge S^{dn} \xrightarrow{1 \wedge j_n} \text{mor}_n(\mathbb{F} \oplus V, W) \wedge \text{mor}_n(V, \mathbb{F} \oplus V) \xrightarrow{\circ} \text{mor}_n(V, W)$$

を  $\text{rc}_n$  と書き, restricted composition という。

Proposition 6.2.9 は、この restricted composition についての次の性質からすぐに得られる。

**Lemma 6.2.11.** 次の pushout diagram がある。

$$\begin{array}{ccc} \text{mor}_n(\mathbb{F} \oplus V, W) \wedge (\mathbb{F}^n \cup \{\infty\}) & \longrightarrow & \text{mor}_n(\mathbb{F} \oplus V, W) \wedge (\mathbb{F}^n \cup \{\infty\}) \wedge [0, \infty] \\ \text{rc}_n \downarrow & & \downarrow \\ \text{mor}_n(V, W) & \longrightarrow & \text{mor}_{n+1}(V, W) \end{array}$$

すなわち  $\text{rc}_n$  の (reduced) mapping cone は  $\text{mor}_{n+1}(V, W)$  と同相である。

*Proof.*  $\text{rc}_n$  の mapping cone が、図式

$$\begin{array}{ccc} \text{mor}_n(\mathbb{F} \oplus V, W) \wedge (\mathbb{F}^n \cup \{\infty\}) & \longrightarrow & \text{mor}_n(\mathbb{F} \oplus V, W) \wedge (\mathbb{F}^n \cup \{\infty\}) \wedge [0, \infty] \\ \text{rc}_n \downarrow & & \\ \text{mor}_n(V, W) & & \end{array}$$

の pushout である。  $\text{rc}_n$  の mapping cone と  $\text{mor}_{n+1}(V, W)$  との間の同相写像を作るためには、pushout の universality より

$$\text{mor}_n(\mathbb{F} \oplus V, W) \wedge (\mathbb{F}^n \cup \{\infty\}) \wedge [0, \infty] \longrightarrow \text{mor}_{n+1}(V, W)$$

を定義するとよい。これは

$$\begin{aligned} g &= f|_V \\ \mathbf{w} &= (\mathbf{v} + (f|_{\mathbb{F}})_*(\mathbf{x}), \frac{1}{t}f|_{\mathbb{F}}(1)) \end{aligned}$$

を用いて

$$(f, \mathbf{v}) \wedge \mathbf{x} \wedge t \mapsto g \wedge \mathbf{w}$$

で定義される。逆写像

$$\text{mor}_{n+1}(V, W) \longrightarrow \text{mapping cone of } \text{rc}_n$$

は  $(g, \mathbf{w}) = (g, w_1, \dots, w_{n+1})$  に対して

$$\begin{aligned} f(\lambda, a) &= g(a) + \lambda \frac{w_{n+1}}{\|w_{n+1}\|} \\ v_i &= w_i - \langle w_i, w_{n+1} \rangle \frac{w_{n+1}}{\|w_{n+1}\|^2} \\ x_i &= \left\langle w_i, \frac{w_{n+1}}{\|w_{n+1}\|} \right\rangle \\ t &= \frac{1}{\|w_{n+1}\|} \end{aligned}$$

として  $(f, \mathbf{v}, \mathbf{x}, t)$  を対応させればよい。 □

*Proof of Proposition 6.2.9.* Yoneda Lemma より, 集合として

$$E(V) = \text{nat}_n(\text{mor}_n(V, -), E)$$

という同一視ができる。そこで上の Lemma を用いれば求める pullback の図式ができる。 □

**Definition 6.2.12.** 図式 (6.5) を用いて集合

$$(\text{ind}_n^{n+1} E)(V) = (\text{res}_n^{n+1} \text{ind}_n^{n+1} E)(V)$$

に位相を定義する。

また  $E \in \mathcal{E}_n$  に対し

$$E^{(m)} = \text{ind}_n^{n+m} E$$

とおく。  $E^{(1)}$  を  $E$  の derivative という。

以上の定義を用いると,  $t_n : E(V) \longrightarrow T_n E(V)$  の homotopy fiber が記述できる。

**Proposition 6.2.13.**  $E \in \mathcal{E}_0$  に対し

$$E^{(n+1)}(V) = \text{hofiber}(t_n : E(V) \longrightarrow T_n E(V))$$

である。

証明は Proposition 6.2.9 と同じである。ただし  $T_n$  はホモトピー極限で定義されていたので, 対応するホモトピー余極限の mapping cone を考えないといけない。

**Lemma 6.2.14.** 制限による写像

$$\text{hocolim}_{0 \neq U \subset \mathbb{F}^{n+1}} \text{mor}_0(U \oplus V, W) \longrightarrow \text{mor}_0(V, W)$$

の mapping cone は  $\text{mor}_{n+1}(V, W)$  と同相である。

*Proof of Proposition 6.2.13.* 上の Lemma と定義より

$$\begin{aligned}
E^{(n+1)}(V) &= \text{nat}_0(\text{mor}_{n+1}(V, -), E) \\
&= \text{nat}_0\left(\text{hofiber}\left(\text{hocolim}_{0 \neq U \subset \mathbb{F}^{n+1}} \text{mor}_0(U \oplus V, -) \rightarrow \text{mor}_0(V, -)\right), E\right) \\
&= \text{hofiber}\left(\text{nat}_0(\text{mor}_0(V, -), E) \rightarrow \text{nat}_0\left(\text{hocolim}_{0 \neq U \subset \mathbb{F}^{n+1}} \text{mor}_0(U \oplus V, -), E\right)\right) \\
&= \text{hofiber}\left(E(V), \text{holim}_{0 \neq U \subset \mathbb{F}^{n+1}} E(U \oplus V)\right)
\end{aligned}$$

である。 □

**Corollary 6.2.15.**  $E$  が *polynomial of degree*  $\leq n$  であるための必要十分条件は、任意の  $V$  に対し  $E^{n+1}(V)$  が一点と弱同値であることである。

**Example 6.2.16.**  $E$  をスペクトラムとする。

$$F(V) = \Omega^\infty(E \wedge (nV) \cup \{\infty\})$$

とする。すると

$$\sigma_n : F(V) \longrightarrow \Omega^{dn} F(\mathbb{F} \oplus V)$$

は同相写像である。よって

$$F^{(n+1)}(V) \underset{w}{\simeq} *$$

となる。つまり  $F$  は *polynomial functor of degree*  $\leq n$  である。 □

Goodwillie calculus のときの対称群に対応するのが直交 (ユニタリ) 群である。

**Example 6.2.17.**  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  として  $E$  を  $O(n)$  作用を持つスペクトラムとする。このとき

$$F(V) = \Omega^\infty((E \wedge S^{nV})_{hO(n)})$$

は *polynomial of degree*  $\leq n$  である。 □

**Definition 6.2.18.**  $F \in \mathcal{E}$  に対し

$$P_n F = \text{hocolim}_i T_n^i F$$

と定義する。

**Theorem 6.2.19.**  $P_n$  について以下が成り立つ。

1.  $P_n F$  は *polynomial of degree*  $\leq n$
2.  $E$  が *polynomial of degree*  $\leq n$  ならば

$$E \underset{w}{\simeq} P_n E$$

3.  $m \leq n$  ならば

$$P_m E \underset{w}{\simeq} P_m P_n E$$

## 6.3 Stable splitting への応用

$\Omega^n \Sigma^n X$  の Snaithe splitting が Goodwillie calculus を用いて簡単に証明された (Example 1.3.4) ように, orthogonal calculus を用いて stable splitting を証明することもできる。実際, Arone [Aro01] は次のことに気がついた。

**Theorem 6.3.1.** 連続関手

$$F : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbf{Spaces}_*$$

の自然な filtration

$$* = F_0(V) \subset F_1(V) \subset \cdots \subset F(V)$$

で次の条件をみたすものが与えられているとする:

1. 各 inclusion  $F_{n-1}(V) \hookrightarrow F_n(V)$  は cofibration である
2.  $F(V) = \operatorname{colim}_n F_n(V)$
3. 各  $n$  に対し

$$F_n(V)/F_{n-1}(V) \simeq (X_n \wedge S^{nV})_{hO(n)}$$

となる  $O(n)$ -space  $X_n$  がある

このとき, stable splitting

$$F(V) \underset{S}{\simeq} \bigvee_{n=1}^{\infty} F_n(V)/F_{n-1}(V)$$

がある。

$W \in \operatorname{ob}(\mathcal{F})$  を fix し, functor

$$V \longmapsto \operatorname{mor}(V, V \oplus W)$$

を考える。直和分解により  $\operatorname{mor}(V, V \oplus W)$  の元を

$$\begin{aligned} g &: V \longrightarrow V \\ h &: V \longrightarrow W \end{aligned}$$

の組と考える。

$\operatorname{mor}(V, V \oplus W)$  は Stiefel manifold であり, その stable splitting は H. Miller [Mil85] により与えられた。その Miller の filtration が上の定理の条件をみたすことを確かめよう。以下全て実数上のベクトル空間で考える。

まず filtration は次で定義される。

$$R^n(V, W) = \{(g, h) \in \operatorname{mor}(V, V \oplus W) \mid \dim(\operatorname{Ker}(g - 1)^\perp) \leq n\}$$

すると

$$R^{n-1}(V, W) \subset R^n(V, W)$$

は cofibration である。

次に

$$R^n(V, W)/R^{n-1}(V, W) = (R^n(V, W) - R^{n-1}(V, W)) \cup \{\infty\}$$

を調べるために  $R^n(V, W) - R^{n-1}(V, W)$  を考える。定義より  $(g, h) \in R^n(V, W) - R^{n-1}(V, W)$  であるための必要十分条件は

$$\begin{aligned} \langle g(x), g(y) \rangle + \langle h(x), h(y) \rangle &= \langle x, y \rangle \\ \dim \operatorname{Ker}(g - 1)^\perp &= n \end{aligned}$$

である。二番目の条件に着目し Grassmann manifold への写像

$$p: R^n(V, W) - R^{n-1}(V, W) \longrightarrow G_n(V) = \{U \subset V \mid \dim U = n\}$$

を

$$p(g, h) = \text{Ker}(g - 1)^\perp$$

で定義する。するとこれは fiber bundle になる。その  $U \in G_n(V)$  上の fiber  $p^{-1}(U)$  の元  $(g, h)$  に対し、 $g|_{U^\perp} = 1_{U^\perp}$  であるから、 $x, y \in U^\perp$  なら

$$\langle g(x), g(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

となり

$$\langle h(x), h(y) \rangle = 0$$

である。よって  $h|_{U^\perp} = 0$  である。これは  $(g, h) \in p^{-1}(U)$  に対し  $(g|_U, h|_U)$  を対応させる写像

$$p^{-1}(U) \longrightarrow \{(g', h') \in \text{mor}(U, U \oplus W) \mid \text{Ker}(g' - 1) = 0\}$$

が同相であることを意味する。

**Definition 6.3.2.**  $\mathfrak{o}(V)$  を直交群  $O(V)$  の Lie 環とし  $V$  の skew symmetric endomorphism 全体と同一視する。  
 $x \in \mathfrak{o}(U)$  と  $y \in \text{Hom}(U, W)$  に対し

$$\begin{aligned} D &= \left(1 + \frac{tyy}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \\ C &= \frac{1}{2}DxD + \frac{1}{4}tyy \end{aligned}$$

とおき、写像

$$\psi: \mathfrak{o}(U) \oplus \text{Hom}(U, W) \longrightarrow \text{mor}(U, U \oplus W)$$

を

$$\psi(x, y) = \left( (C + 1)^{-1}(C - 1), \frac{1}{2}y(1 - (C + 1)^{-1}(C - 1)) \right)$$

で定義する。

**Lemma 6.3.3.**  $\psi$  は  $\{(g, h) \in \text{mor}(U, U \oplus W) \mid \text{Ker}(g - 1) = 0\}$  の上への微分同相である。

**Corollary 6.3.4.**  $p: R^n(V, W) - R^{n-1}(V, W) \longrightarrow G_n(V)$  は  $\mathfrak{o}(\mathbb{R}^n) \oplus \text{Hom}(\mathbb{R}^n, W)$  をファイバーに持つ vector bundle である。

よって  $R^n(V, W)/R^{n-1}(V, W)$  は vector bundle  $p$  の Thom complex であり

$$\begin{aligned} R^n(V, W)/R^{n-1}(V, W) &= G_n(V)^{\mathbb{R}^n \oplus \text{Hom}(\mathbb{R}^n, W)} \\ &= (O(V)/O(V - \mathbb{R}^n) \times_{O(\mathbb{R}^n)} (\mathfrak{o}(\mathbb{R}^n) \oplus \text{Hom}(\mathbb{R}^n, W))) \cup \{\infty\} \\ &= (\text{mor}(\mathbb{R}^n, V) \times (\mathfrak{o} \oplus \text{Hom}(\mathbb{R}^n, W))) \cup \{\infty\} / O(n) \\ &\simeq ((\text{mor}(\mathbb{R}^n, V) \times (\mathfrak{o} \oplus \text{Hom}(\mathbb{R}^n, W))) \cup \{\infty\})_{hO(n)} \\ &= \left( (\text{mor}(\mathbb{R}^n, V)_+ \wedge S^\circ \wedge S^{\text{Hom}(\mathbb{R}^n, W)} \right)_{hO(n)} \\ &\cong \left( (\text{mor}(\mathbb{R}^n, V)_+ \wedge S^\circ \wedge S^{nW} \right)_{hO(n)} \end{aligned}$$

よって Theorem 6.3.1 より stable splitting

$$\text{mor}(V, V \oplus W) \underset{S}{\simeq} \bigvee_{n=1}^{\dim V} R^n(V, W)$$

を得る。

更に、同様にして Stiefel manifold の stable splitting も得られることが知られている。詳しくは [Mit86, Cra87] を読まれたい。

Orthogonal calculus のもう一つの応用としては、higher Freudenthal suspension の構成がある。連続関手

$$V \mapsto \Omega^V \Sigma^V X = F_X(V)$$

を考えよう。包含写像

$$j : V \hookrightarrow \mathbb{R} \oplus V$$

から誘導される

$$E : \Omega^V \Sigma^V X \longrightarrow \Omega^V \Omega \Sigma \Sigma^V X$$

を Freudenthal suspension といい、unstable homotopy theory では非常に重要な写像である。複素数上のベクトル空間で考えれば、所謂 double suspension

$$E^2 : \Omega^V \Sigma^V X \longrightarrow \Omega^V \Omega^2 \Sigma^2 \Sigma^V X$$

を得る。関手  $F_X$  の orthogonal calculus を行なうことにより高次の double suspension

$$\text{ad}(\sigma_n) : F_X^{(n-1)}(V) \longrightarrow \Omega^{2n} F_X^{(n-1)}(\mathbb{C} \oplus V)$$

を得る。これについては Arone が [Aro98] で Goodwillie calculus を用いて調べている。その論文で述べている興味深い結果として次のものがある。

**Theorem 6.3.5.**  $X$  が奇数次元の球面を奇素数  $p$  で局所化したものなら

$$\text{ad}(\sigma_{p^k}) : F_X^{p^k-1}(0) \longrightarrow \Omega^{2p^k} F_X^{p^k-1}(\mathbb{C})$$

は  $v_k$ -periodic ホモトピー同値である。

Arone は更に  $p$  中でないところでは null homotopic であると予想している。



---

## Bibliography

---

- [AD01] G. Z. Arone and W. G. Dwyer. Partition complexes, Tits buildings and symmetric products. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 82(1):229–256, 2001.
- [AM99] Greg Arone and Mark Mahowald. The Goodwillie tower of the identity functor and the unstable periodic homotopy of spheres. *Invent. Math.*, 135(3):743–788, 1999.
- [Aro98] Greg Arone. Iterates of the suspension map and Mitchell’s finite spectra with  $A_k$ -free cohomology. *Math. Res. Lett.*, 5(4):485–496, 1998.
- [Aro01] Greg Arone. The Mitchell-Richter filtration of loops on Stiefel manifolds stably splits. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 129(4):1207–1211 (electronic), 2001.
- [BK72] A. K. Bousfield and D. M. Kan. *Homotopy limits, completions and localizations*. Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [BM51] A. L. Blakers and W. S. Massey. The homotopy groups of a triad. I. *Ann. of Math. (2)*, 53:161–205, 1951.
- [BM52] A. L. Blakers and W. S. Massey. The homotopy groups of a triad. II. *Ann. of Math. (2)*, 55:192–201, 1952.
- [BM53] A. L. Blakers and W. S. Massey. The homotopy groups of a triad. III. *Ann. of Math. (2)*, 58:409–417, 1953.
- [Boa99] J. Michael Boardman. Conditionally convergent spectral sequences. In *Homotopy invariant algebraic structures (Baltimore, MD, 1998)*, volume 239 of *Contemp. Math.*, pages 49–84. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [BV68] J. M. Boardman and R. M. Vogt. Homotopy-everything  $H$ -spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 74:1117–1122, 1968.
- [BV73] J. M. Boardman and R. M. Vogt. *Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces*. Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [CJ98] Michael Crabb and Ioan James. *Fibrewise homotopy theory*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag London Ltd., London, 1998.
- [Cra87] M. C. Crabb. On the stable splitting of  $U(n)$  and  $\Omega U(n)$ . In *Algebraic topology, Barcelona, 1986*, volume 1298 of *Lecture Notes in Math.*, pages 35–53. Springer, Berlin, 1987.
- [Cur71] Edward B. Curtis. Simplicial homotopy theory. *Advances in Math.*, 6:107–209 (1971), 1971.
- [DH01] William G. Dwyer and Hans-Werner Henn. *Homotopy theoretic methods in group cohomology*. Advanced Courses in Mathematics—CRM Barcelona. Birkhäuser Verlag, Basel, 2001.
- [DHK] Willam G. Dwyer, Phillip S. Hirschhorn, and Daniel M. Kan. *Model Categories and More General Abstract Homotopy Theory: A Work in What We Like to Think of as Progress*.

- [DI] Daniel Dugger and Daniel C. Isaksen. Hypercovers in topology, [arXiv:math.AT/0111287](https://arxiv.org/abs/math/0111287).
- [DS95] W. G. Dwyer and J. Spaliński. Homotopy theories and model categories. In *Handbook of algebraic topology*, pages 73–126. North-Holland, Amsterdam, 1995.
- [DT58] Albrecht Dold and René Thom. Quasifaserungen und unendliche symmetrische Produkte. *Ann. of Math. (2)*, 67:239–281, 1958.
- [Dwy74] William G. Dwyer. Strong convergence of the Eilenberg-Moore spectral sequence. *Topology*, 13:255–265, 1974.
- [Dwy75] William G. Dwyer. Exotic convergence of the Eilenberg-Moore spectral sequence. *Illinois J. Math.*, 19(4):607–617, 1975.
- [EKMM97] A. D. Elmendorf, I. Kriz, M. A. Mandell, and J. P. May. *Rings, modules, and algebras in stable homotopy theory*, volume 47 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
- [GJ99] Paul G. Goerss and John F. Jardine. *Simplicial homotopy theory*, volume 174 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1999.
- [Goo90] Thomas G. Goodwillie. Calculus. I. The first derivative of pseudoisotopy theory. *K-Theory*, 4(1):1–27, 1990.
- [Goo03] Thomas G. Goodwillie. Calculus. III. Taylor series. *Geom. Topol.*, 7:645–711 (electronic), 2003.
- [Goo92] Thomas G. Goodwillie. Calculus. II. Analytic functors. *K-Theory*, 5(4):295–332, 1991/92.
- [GW99] Thomas G. Goodwillie and Michael Weiss. Embeddings from the point of view of immersion theory. II. *Geom. Topol.*, 3:103–118 (electronic), 1999.
- [Hir03] Philip S. Hirschhorn. *Model categories and their localizations*, volume 99 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [Hov99] Mark Hovey. *Model categories*, volume 63 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [Joh95] Brenda Johnson. The derivatives of homotopy theory. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 347(4):1295–1321, 1995.
- [Mah82] Mark Mahowald. The image of  $J$  in the  $EHP$  sequence. *Ann. of Math. (2)*, 116(1):65–112, 1982.
- [May72] J. P. May. *The geometry of iterated loop spaces*. Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [May75] J. Peter May. Classifying spaces and fibrations. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 1(1, 155):xiii 98, 1975.
- [May92] J. Peter May. *Simplicial objects in algebraic topology*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1992.
- [Mil67] R. James Milgram. The bar construction and abelian  $H$ -spaces. *Illinois J. Math.*, 11:242–250, 1967.
- [Mil85] Haynes Miller. Stable splittings of Stiefel manifolds. *Topology*, 24(4):411–419, 1985.
- [Mit86] Stephen A. Mitchell. A filtration of the loops on  $SU(n)$  by Schubert varieties. *Math. Z.*, 193(3):347–362, 1986.
- [ML98] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1998.

- 
- [MT92] Mark Mahowald and Robert D. Thompson. The  $K$ -theory localization of an unstable sphere. *Topology*, 31(1):133–141, 1992.
- [MW] Ib Madsen and Michael S. Weiss. The stable moduli space of Riemann surfaces: Mumford’s conjecture, [arXiv:math.AT/0212321](https://arxiv.org/abs/math/0212321).
- [Qui67] Daniel G. Quillen. *Homotopical algebra*. Lecture Notes in Mathematics, No. 43. Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- [Qui69] Daniel Quillen. Rational homotopy theory. *Ann. of Math. (2)*, 90:205–295, 1969.
- [Rec70] David L. Rector. Steenrod operations in the Eilenberg-Moore spectral sequence. *Comment. Math. Helv.*, 45:540–552, 1970.
- [Ser53] Jean-Pierre Serre. Groupes d’homotopie et classes de groupes abéliens. *Ann. of Math. (2)*, 58:258–294, 1953.
- [Sin] Dev P. Sinha. The topology of spaces of knots, [arXiv:math.AT/0202287](https://arxiv.org/abs/math/0202287).
- [Smi70a] Larry Smith. *Lectures on the Eilenberg-Moore spectral sequence*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 134. Springer-Verlag, Berlin, 1970.
- [Smi70b] Larry Smith. On the Künneth theorem. I. The Eilenberg-Moore spectral sequence. *Math. Z.*, 116:94–140, 1970.
- [Str72] Arne Strøm. The homotopy category is a homotopy category. *Arch. Math. (Basel)*, 23:435–441, 1972.
- [Tho90] Robert D. Thompson. The  $v_1$ -periodic homotopy groups of an unstable sphere at odd primes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 319(2):535–559, 1990.
- [Wal78a] Friedhelm Waldhausen. Algebraic  $K$ -theory of generalized free products. I, II. *Ann. of Math. (2)*, 108(1):135–204, 1978.
- [Wal78b] Friedhelm Waldhausen. Algebraic  $K$ -theory of generalized free products. III, IV. *Ann. of Math. (2)*, 108(2):205–256, 1978.
- [Wal78c] Friedhelm Waldhausen. Algebraic  $K$ -theory of topological spaces. I. In *Algebraic and geometric topology (Proc. Sympos. Pure Math., Stanford Univ., Stanford, Calif., 1976), Part 1*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXII, pages 35–60. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1978.
- [Wal79] Friedhelm Waldhausen. Algebraic  $K$ -theory of topological spaces. II. In *Algebraic topology, Aarhus 1978 (Proc. Sympos., Univ. Aarhus, Aarhus, 1978)*, volume 763 of *Lecture Notes in Math.*, pages 356–394. Springer, Berlin, 1979.
- [Wal85] Friedhelm Waldhausen. Algebraic  $K$ -theory of spaces. In *Algebraic and geometric topology (New Brunswick, N.J., 1983)*, volume 1126 of *Lecture Notes in Math.*, pages 318–419. Springer, Berlin, 1985.
- [Wei95] Michael Weiss. Orthogonal calculus. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 347(10):3743–3796, 1995.
- [Wei96] Michael Weiss. Calculus of embeddings. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 33(2):177–187, 1996.
- [Wei99] Michael Weiss. Embeddings from the point of view of immersion theory. I. *Geom. Topol.*, 3:67–101 (electronic), 1999.