ファイバー束とホモトピー I

ファイバー束入門

玉木 大

信州大学理学部

Version: December 1, 2016

目次

序に代えて

昔話

筆者がファイバー束と出会ったのは, 京都大学に入ってすぐのこと。 当時は, 大学の授業に出るよりも自主ゼミで勉強するもの, という雰囲気が学生の間にあり, 先輩達による自主ゼミのガイドブックのようなものも配布されていた。 トポロジーを勉強しようと思って入学したので, トポロジー関係の本で何かないかと探していたところ, その冊子で紹介されていたのが Steenrod (スティーンロッド) の本 [Ste51] だった。

今でこそ, アマゾンなどで気軽に洋書が買えるが, 田舎の高校生だったときには, 洋書, しかも学術専門書を自分で買うことなど, 想像だにできないことだった。 幸い当時は, まだ河原町通りに丸善があり, Steenrodの本も鎮座していた。 正確な値段は憶えていないが, 10,000円ぐらいだったと思う。 丸善に行って開いてみては,「高いなあ」と思って書棚に戻す, ということを何度か繰り返していた。 意を決して購入し読み始めたのは2回生の夏休みだったか。 それ以来, Serre/Hurewicz fibration, quasifibration, そしてモデル圏での fibration と次第に抽象化されていきながらも, ずっとファイバー束から発展していった概念のお世話になってきた。

そこで, 信州大学に赴任し最初に講義を行なったときにも, ファイバー束を題材にしようと考えた。本書はそのときの 3, 4年生向けの講義が原型である。その後, 講義ノートを TeXで打って製本して配ったり, ホームページで公開したり, 4年生の卒業研究のテキストに使ったりと, 個人的には様々な形で利用してきた。

最初に学生に配布したときは, 1冊が第I部と第II部から成るという構成だった。 内容的にも, 分量としても, 2分冊にした方がよいと思い, 2冊に分けた内の1冊目が本書である。

しかしながら, ファイバー束の講義を行なったときには一貫した目的があった。 ファイバー束の基本的な性質を見ていくことにより, ホモトピー (連続的変形) が数学の基本的な構造であることを理解してもらう, ということだった。 もちろんファイバー束自体現代幾何学では基本的な道具であり, その基本的性質を理解することは, 学生にとって重要な修行の一つである。 当然, それも講義をしていたときの目的の一つだったのであるが, 個人的には,「ホモトピー論入門」を講義したかったのである。

ホモトピー論という分野が生れたのは1920年から30年ぐらいだろうか, 数学の歴史から見ればそれほど昔のことではない。その後, 特に第二次世界大戦後, 急速に成長し, 40〜50年の内に抽象的で複雑な概念を数多く含んだ理論として成熟した。 ホモトピー, つまり連続的変形という概念は, もともと様々な数学の分野, 特に幾何学の分野で自然現われるものであり, ホモトピー論のアイデアは各種幾何学に応用されてきた。しかし, その後ホモトピー論は「連続的変形の理論」としてそれ自体で独立した分野となり, 他の幾何学とは別の道を歩み始めた。 現在のホモトピー論[1]だけを見ると, とても幾何学とは思えない代物である。

そこで, ファイバー束を例にとり, 幾何学的問題からどのようにホモトピー論の各種概念が派生するのかを説明することにより, 現代の高度に抽象化されたホモトピー論の入門となることを考えたわけである。

本書の目的および構成

本書である第I部は, もう20年も前, 1993年度前期に行なったものを基本に, 1996年度の講義の際に改良したものである。 その際に配布したものは, 3つの章から成っていた。 その内容は以下の通りである:

- 第 1 章 ファイバー束の基本

  局所自明化を用いたファイバー束の定義と簡単な例の解説。

- 第 2 章 ファイバー束と位相群

  2つの点のまわりの局所自明化の関係としての座標変換の導入と, それに基いた構造群を持ったファイバー束の導入。 そして, 構造群を持つファイバー束の中で中心的役割を果すものととしての, 主束の導入。

- 第 3 章 ファイバー束の分類

  「良い空間」X 上の主G束の同型類の集合 $P_G(X)$ が, 構造群群 G の分類空間 BG への連続写像のホモトピー類の集合 $[X, BG]$ と一対一に対応していることを証明することが目的である。 そのために, ファイバー束の間の写像, プルバック, CW複体, ホモトピー群などの必要な道具を準備し, 普遍束が存在すると仮定して, 分類定理を証明する。 そして, 最後に普遍束の構成を行なう。

その後, 2分冊にした際に, 自然に現れるファイバー束の例を入れた方がよいことに気がついた。 例えば, 本書では, §1.1で球面 S^2 の接束を出発点としてファイバー束を導入しているが, そのような可微分多様体の接束はベクトル束という構造を持ち, 現代幾何学での基本的な言語として使われている。また, トポロジーの入門的内容の本や講義では, 基本群が

[1]例えば, Hovey の本 [Hov99] や Hirschhorn の本 [Hir03] で扱われている model category や, May 達の本 [Elm+97] で扱われている spectrum の理論など。

扱われることが多いが, 基本群と関係が深いのは被覆空間であり, これもファイバー束の特別な場合である。

そこで本書では, もう一つ章を追加することにした。

- 第 4 章 重要なファイバー束の例

  この章では, ファイバー束の特別な場合として被覆空間とベクトル束を導入し, その基本的な性質について述べている。

第II部について

続編 [FibII] は以下の章から成る。

- 第1章 ファイバー空間
- 第2章 準ファイバー空間とその応用
- 第3章 ホモトピー論とは何か?

詳しい内容については, [FibII] の「序に代えて」 をご覧いただきたい。

本書での基本的な約束

- 人名は基本的に原語表記とする。 ただし初出時は括弧書きでカタカナの読みを添える。
- 数学用語は, 和訳が定着しているものは日本語表記とする。 またカタカナ書きが一般的に用いられているものはカタカナ表記とする。 それ以外の数学用語は英語表記とするが, 初出時のみ筆者による和訳を付けることにする。

謝辞

信州大学でファイバー束の講義を始めたのは1993年4月, ロチェスター大学で Ph.D.をとってほんの一ヶ月後のことだった。 それが日本語で日本人の学生を教えた最初の経験である。 アメリカで微積分と線形代数を教えたことはあったが, ファイバー束のような専門的な内容を講義したことはなかった。 更に悪いことに, 4年生と大学院生向けに講義するつもりが, 蓋を開けてみれば, ほとんどの学生が3年生だった。

その講義をがまんして聴講し, きたない板書を読み取りノートをとり続けてくれた学生達には感謝したい。 彼等が, 耳を傾けノートを取る姿に非常に励まされた。

最初の講義の後, そして1996年度の二度目の講義の後に, このノートの原形となったものを学生に配布したが, それを読んでミスプリントや間違いを指摘してくれた学生が何人

もいた。 さらに, それを2001年度の4年生のセミナーにも用いたが, そこで数多くの間違いが見つかり, このノートが人前に出せるまでになった。 セミナーのメンバー, 青木, 大藤, 嶋田, 鶴田, そしてオブザーバーとして参加してくれた大学院生の椎名には非常に感謝している。

ファイバー束のホモトピー論的性質の重要性に気づいたのは, ロチェスター大学の大学院生だったとき, 他の大学院生との議論やセミナーによる。 現在の著者の数学観は, 彼等を含めたロチェスター大学の algebraic topologists との交流により形成されたといって過言ではないだろう。 この機会に, ロチェスター大学の algebraic topologists 及び留学の機会をつくっていただいた河野明先生には感謝の意を表したい。

1 ファイバー束の基本

1.1 ファイバー束とは?

ファイバー束 (fiber bundle) は, 現代の幾何学の中で最も重要な位置を占めている道具の一つである, と言って過言ではないだろう。特に微分幾何では, 多くの幾何学的な構造は, ファイバー束の言葉を用いて記述されている。 極端にいえば, 微分幾何学とはファイバー束の幾何学といっても良いかも知れない。 例えば, ベクトル場, 微分形式, 接続, 曲率などは, ある種のファイバー束の section として定義するのがもっとも簡単でかつ elegant である。とは言っても, そのような微分幾何の概念に慣れていない人にとっては, 何がどう簡単で elegant なのか想像もつかないだろう。

微分幾何学だけでなく位相幾何学でも代数幾何学でも (というよりファイバー束が現れた頃には, まだ幾何学はそれほど細分化されていなかったのであるが), ある空間を小さな空間の束として見たり, また同じような空間を束ねて大きな空間を作るというアイデアは自然に現れてきた。

このようなアイデアが発展してファイバー束という概念が導入されたわけであるが, ファイバー束の起源など歴史的なことはこのノートでは扱う余裕はない。 ここでは, まずファイバー束というものを使うと幾何学的な概念がすっきりあらわされることを, 一つだけ例を使って見ることにしよう。 例としては2次元球面上のベクトル場 (vector field) を考える。

2次元球面 S^2 (正確には, 2次元の単位球面) は

$$S^2 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\}$$

で定義される $\mathbb{R}^3$ の部分空間である。 この S^2 上のベクトル場を考える。S^2 上のベクトル場 $\boldsymbol{v}$ とは, 各点 $x \in S^2$ に対し x での接ベクトルを対応させる規則のことである。

$$x \longmapsto \boldsymbol{v}(x) \in T_x S^2 \tag{1.1}$$

ここで $T_x S^2$ は, S^2 の x における接空間 (tangent space) であり, 正確には,

$$T_x S^2 = \left\{\xi \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x \perp \xi\right\}$$

で定義される $\mathbb{R}^3$ の部分ベクトル空間である。この定義だと T_xS^2 は原点を通っているので S^2 に接しているように見えないが, 実際の x での接平面はこれを x というベクトルだけ平行移動したものなので, T_xS^2 を考えても同じことである。T_xS^2 の方が, ベクトル空間になっているのでなにかと便利なのである。

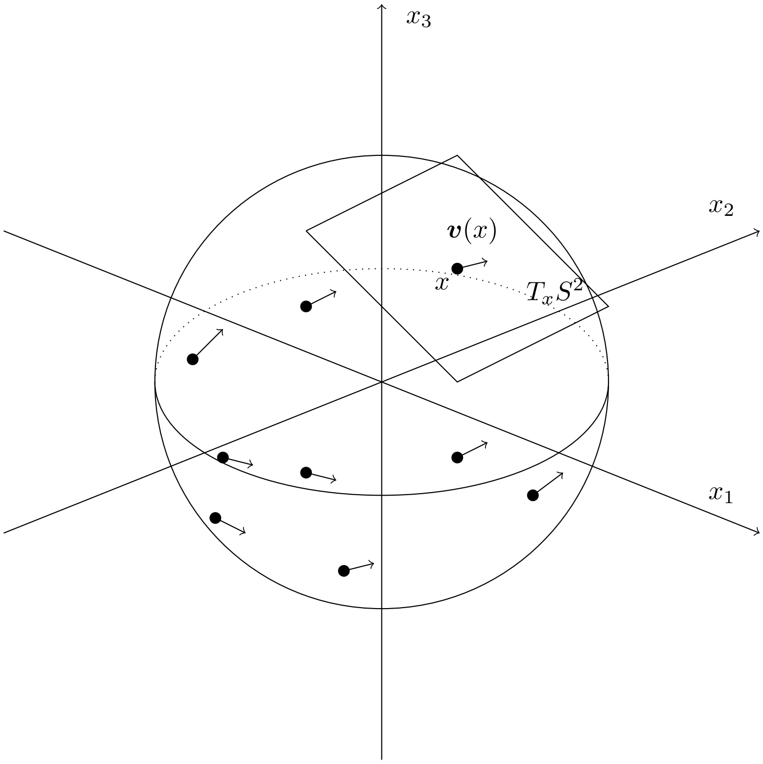


図 1.1: S^2 上のベクトル場

つまり, S^2 上のベクトル場というのは, 上図のように S^2 の各点に, その点に接するようにベクトルが張り付いているという感じのものである。

さて, ここでベクトル場を (1.1) のように考えると少し問題がある。空間の間の点の対応があると, それを写像として書きたいと思うのが自然であるが, 今の場合ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の値域が点 x によって変わってしまい, それが出来ないのである。これを解決するためには, T_xS^2 をすべて集めてきて一つの空間にしてしまえば良い。よって $TS^2 = \coprod_{x\in S^2} T_xS^2$ と定義する。これを空間として考えるには, 位相を入れなければならないが, その一番簡単な方法は, TS^2 を $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ の部分空間とみなすことである。

$$TS^2 = \left\{ (x,\xi) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x \in S^2, x \perp \xi \right\}$$

TS^2 を用いると, S^2 上のベクトル場は写像

$$\boldsymbol{v} : S^2 \longrightarrow TS^2$$

として定義できる。しかし，このような写像全てがベクトル場と呼べるわけではない。元々の定義 (1.1) から，各点 $x \in S^2$ に対し $\boldsymbol{v}(x) \in T_xS^2$ でなければならない。 この最後の条件をもっと簡単に書くには，T_xS^2 の点は全て一点 $\{x\}$ に写すとして定義される写像

$$p : TS^2 \longrightarrow S^2$$

を用いれば良い。これを使うと，上の条件 $v(x) \in T_xS^2$ は $p(v(x)) = x$ と書ける。つまり S^2 上のベクトル場とは連続写像

$$\boldsymbol{v} : S^2 \longrightarrow TS^2$$

で次の図式を可換にするものである。

$$\begin{tikzcd} & TS^2 \arrow[d, "p"] \\ S^2 \arrow[ur, "v"] \arrow[r, "="] & S^2 \end{tikzcd}$$

ベクトル場の定義をこのように書き換えると単なる写像になるので，連続なベクトル場とか滑らかなベクトル場などという言葉が，意味を持つようになる。 最初の定義 (1.1) では，ベクトル場の連続性や微分可能性などを考えるのは難しかったことに注意しよう。

TS^2 は，各点での接空間 T_xS^2 を束ねてできたものなので，空間 TS^2 と写像

$$p : TS^2 \longrightarrow S^2$$

を合わせたものを S^2 の接束 (*tangent bundle*) という。

この例で，接束というものが便利なものであることがわかっていただけたであろうか? 本書 (第I部) では，接束をより一般化かつ抽象化した概念，ファイバー束，について考えていく。

1.2 ファイバー束の定義

前節の例で，T_xS^2 は2次元のベクトル空間であり，点 x に依らず $\mathbb{R}^2$ と同型である。よって TS^2 は，$\mathbb{R}^2$ を S^2 に沿って束ねたものと思える。大まかに言ってファイバー束とは，ある空間 F (fiber) を別の空間 B (base space) に沿って束ねたものである。 しかし余りに雑な束ね方を許してしまうと，後で扱いに困るので，ある程度その束はきちんと揃っている必要がある。 例えば，次のような感じ，に。

例 1.2.1. 1. 円柱 E は，単位区間 $I = [0, 1]$ を 2次元の円板 (disk)

$$D^2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

に沿って束ねたものと思える。このとき $E = D^2 \times I$ なので，全体がきちんと束ねられている。

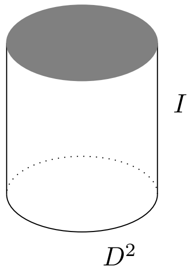


図 1.2: 円柱

2. 円筒 A (annulus, 円柱の側面) を考える。

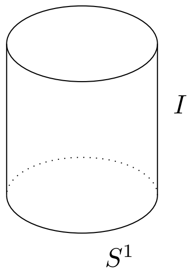


図 1.3: 円筒

この絵では上の円柱との違いがよく分からないかもしれないが, 中身が抜けているものと思ってほしい。円筒 A も上の円柱の例のように, I を単位円

$$S^1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1\right\}$$

に沿って束ねた, というか並べたものと考えられる。

また円筒を横に寝かせると, A は S^1 を I に沿って束ねたものとも考えられる。

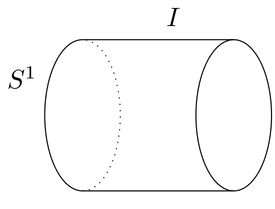


図 1.4: 円筒

実際 $A = S^1 \times I \cong I \times S^1$ である。

3. 2次元トーラス (torus) T^2 を考える。直感的には, トーラスとは次の図で表されるようなドーナツの表面の形をした空間である。

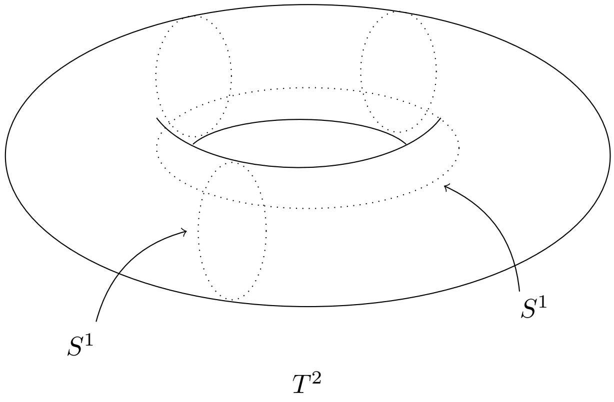


図 1.5: トーラス T^2

正確には

$$T^2 = \{((2+\cos\theta)\cos\varphi, (2+\cos\theta)\sin\varphi, \sin\theta) \,|\, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

で与えられる $\mathbb{R}^3$ の部分空間である。T^2 を「縦」に切ると, 上の図のようにどこを切っても断面は S^1 になる。 また横向きにも S^1 が入っていることもわかると思う。このように T^2 は S^1 を横向きの S^1 に沿って束ねた (並べた) ものと考えられる。

演習問題 1.2.2. $T^2 \cong S^1 \times S^1$ を証明せよ。

4. Möbiusの帯 M は, 図 1.6 のように, 長方形の左端と右端を一度 (180度) ひねって張り合わせてできた空間である。正確には

$$M = \left\{\left((2+t\cos\tfrac{\varphi}{2})\cos\varphi, (2+t\cos\tfrac{\varphi}{2})\sin\varphi, t\sin\tfrac{\varphi}{2}\right) \,\middle|\, -\tfrac{1}{2} \leq t \leq \tfrac{1}{2}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\right\}$$

で与えられる $\mathbb{R}^3$ の部分空間である。

演習問題 1.2.3. M のグラフを描き, M がどの様な形をしているか確かめよ。

よくみると M も円筒のように単位区間 I (より正確には $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$) を S^1 に沿って束ねたものになっている。しかし全体としてはひねりが入っていて, 上のふたつの例のように直積にはならない。そこで, まず S^1 を下の図のようにS^1_+と S^1_- の半分に分け, それらに沿って M を M_+ とM_- のふたつに分ける。 すると M_+, M_- それぞれは, $S^1_+ \times I$, $S^1_- \times I$ と同相になる。つまり M 全体としては直積にならないが, 小さな部分に制限して考えると直積になっている。

□

たったこれだけの例では何のことかさっぱり訳がわからないかも知れないが, とにかくファイバー束の定義をしてしまおう。よく見ると, 上の例の一般化になっているはずである。

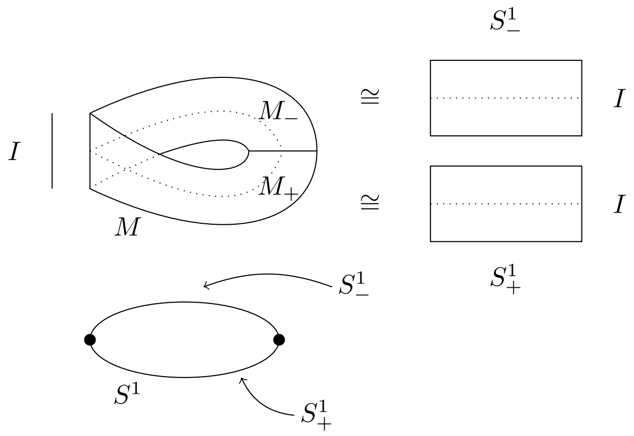


図 1.6: Möbiusの帯

定義 1.2.4. ファイバー束 (fiber bundle) とは, 次の4つ

- 位相空間 B, E, F,
- 連続写像 $p : E \longrightarrow B$

から成り, 以下の条件をみたすものである: 任意の点 $x \in B$ に対し, その開近傍 U_x と同相写像

$$\varphi_x : p^{-1}(U_x) \xrightarrow{\cong} U_x \times F$$

で図式

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(U_x) \arrow[rr, "\varphi_x"] \arrow[dr, "p"'] & & U_x \times F \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\
& U_x &
\end{tikzcd}$$

を可換にするものが存在する。ここで pr_1 は第1成分への射影である。

位相空間 E, B, F は, それぞれ, **全空間 (total space)**, **底空間 (base space)**, **ファイバー (fiber)** と呼ばれる。 写像 p は, **射影 (projection)** と呼ばれる。 各 φ_x は, **局所自明化写像**または**局所自明化 (local trivialization)** と呼ばれる。

このようにたくさんのデータをいちいち書くのは面倒なので, 写像 $p : E \longrightarrow B$ だけをとって, そのファイバー束の名前とすることもある。 また三対 (B, E, F) や写像の列

$$F \longrightarrow E \xrightarrow{p} B$$

を使うこともある。またこの時 E は B 上の F をファイバーとするファイバー束であるともいう。

上の定義で $x' \in U_x$ の時,

$$\begin{aligned} U_{x'} &= U_x \\ \varphi_{x'} &= \varphi_x \end{aligned}$$

と取ってもよい。 よってファイバー束の定義として次を用いてもよいことがわかる。

定義 1.2.5. ファイバー束とは,

- 三つの位相空間 B, E, F,
- 連続写像 $p : E \longrightarrow B$

から成り, 次の条件をみたすものである: B の開被覆

$$B = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

と, 各 α に対し同相写像

$$\varphi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\cong} U_\alpha \times F$$

で図式

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_\alpha) \arrow[rr, "\varphi_\alpha"] \arrow[dr, "p"'] & & U_\alpha \times F \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ & U_\alpha & \end{tikzcd}$$

を可換にするものが存在する。 このφ_αも局所自明化と呼ばれる。

上の最初の三つの例（円柱と円筒とトーラス）の様に, 全体がきちんと揃っているものが最も単純なファイバー束であるので, それに特に名前をつける。

定義 1.2.6. $E = B \times F$ で $p : E \to B$ が 第1成分へ射影のとき, このファイバー束は自明 (trivial) であると言う。

例 1.2.7. 例1.2.1の最初の三つの例は, 自明なファイバー束である。 □

例 1.2.8. Möbiusの帯が S^1 上の $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ をファイバーとするファイバー束であることを示そう。 10ページで絵を描いたときは, ファイバーを単位区間 I と考えたが, Möbiusの帯の定義の式から分るように, $\frac{1}{2}$ だけずらして, ファイバーを $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ と考える方が自然である。

まず射影

$$p : M \longrightarrow S^1$$

を

$$(x, y, z) = \left((2 + t\cos\tfrac{\varphi}{2})\cos\varphi, (2 + t\cos\tfrac{\varphi}{2})\sin\varphi, t\sin\tfrac{\varphi}{2}\right) \in M$$

に対し

$$p(x, y, z) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$$

で定義する。

次に局所自明化写像であるが, 10ページで考えたときは, S^1 を上半分と下半分に分割した。 しかし上のファイバー束の定義によると, S^1 を開集合の和集合として表さなければならない。 そこで

$$\begin{aligned}
U_1 &= \{(\cos\theta, \sin\theta) \,|\, 0 < \theta < 2\pi\} \\
&= S^1 - \{(1, 0)\} \\
U_2 &= \{(\cos\theta, \sin\theta) \,|\, \theta \neq \pi\} \\
&= \{(\cos\theta, \sin\theta) \,|\, \pi < \theta < 3\pi\} \\
&= S^1 - \{(-1, 0)\}
\end{aligned}$$

とおく。

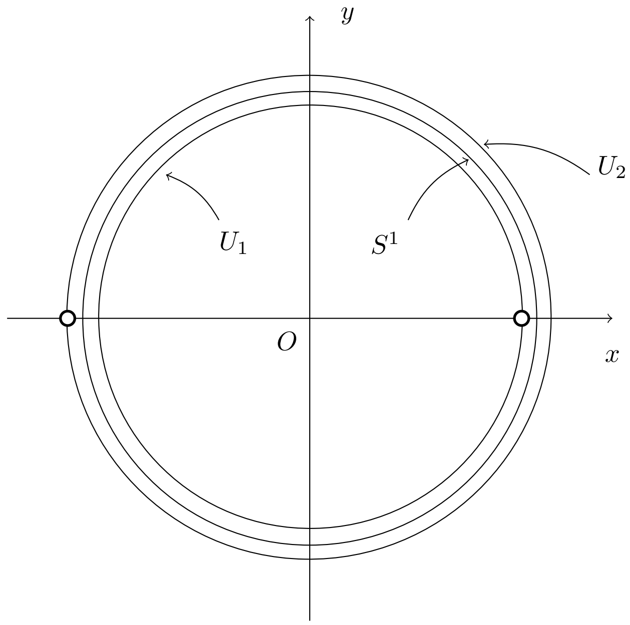


図 1.7: S^1 の開被覆

明らかに U_1, U_2 は S^1 の開集合であり

$$S^1 = U_1 \cup U_2$$

である。この時定義から

$$\begin{aligned}
p^{-1}(U_1) &= \left\{((2 + t\cos\tfrac{\varphi}{2})\cos\varphi, (2 + t\cos\tfrac{\varphi}{2})\sin\varphi, t\sin\tfrac{\varphi}{2}) \,\middle|\, -\tfrac{1}{2} \le t \le \tfrac{1}{2}, 0 < \varphi < 2\pi\right\} \\
p^{-1}(U_2) &= \left\{((2 + t\cos\tfrac{\varphi}{2})\cos\varphi, (2 + t\cos\tfrac{\varphi}{2})\sin\varphi, t\sin\tfrac{\varphi}{2}) \,\middle|\, -\tfrac{1}{2} \le t \le \tfrac{1}{2}, \pi < \varphi < 3\pi\right\}
\end{aligned}$$

となる。

同相 $p^{-1}(U_1) \cong U_1 \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ を示すために, 写像

$$\begin{aligned} f_1 &: (0, 2\pi) \times \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \longrightarrow p^{-1}(U_1) \\ g_1 &: (0, 2\pi) \longrightarrow U_1 \end{aligned}$$

を次のように定義する。

$$\begin{aligned} f_1(\varphi, t) &= \left((2 + t\cos\tfrac{\varphi}{2})\cos\varphi, (2 + t\cos\tfrac{\varphi}{2})\sin\varphi, t\sin\tfrac{\varphi}{2}\right) \\ g_1(\varphi) &= (\cos\varphi, \sin\varphi) \end{aligned}$$

すると, f_1, g_1 は同相写像であり

$$\varphi_1 = (g_1 \times 1_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}) \circ f_1^{-1} : p^{-1}(U_1) \longrightarrow U_1 \times \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right]$$

とおくと, φ_1 は同相写像である。同様に

$$\varphi_2 : p^{-1}(U_2) \longrightarrow U_2 \times \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right]$$

を定義すれば, これらが局所自明化写像になり

$$p : M \longrightarrow S^1$$

はファイバーが $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ のファイバー束になる。 □

演習問題 1.2.9. ファイバー束の局所自明化写像の定義で, どうして底空間の点の開近傍を考えたのかを考えよ。 10ページの Möbiusの帯の絵のように閉集合ではダメなのだろうか?

演習問題 1.2.10. 上の例で, まず p が連続であること, そして f_1, g_1 が同相写像であることを示せ。また φ_1 を参考に同相写像

$$\varphi_2 : p^{-1}(U_2) \longrightarrow U_2 \times [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}]$$

を見付けよ。

上の Möbiusの帯でファイバー束の複雑さがわかってもらえたかもしれないが, 念のためもっと複雑な例を考えることにする。次の例は, 自明でないファイバー束の内で最も有名でかつ重要なものの一つである。 具体的な写像は, 有名な横田の本 [横田一71] から引用した。

例 1.2.11. 3次元球面 S^3 を, ファイバーが 1次元球面 (単位円周) S^1 で, 底空間が 2次元球面 S^2 であるファイバー束の全空間として表す。 一般に n次元球面 S^n は,

$$S^n = \left\{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1\right\}$$

で定義されるが, ここでは複素数を用いて, 次のように表す。

$$
\begin{aligned}
S^1 &= \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z|^2 = 1 \right\} \\
S^2 &= \left\{ (x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C} \,\middle|\, x^2 + |z|^2 = 1 \right\} \\
S^3 &= \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \,\middle|\, |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \right\}
\end{aligned}
$$

射影 $p : S^3 \to S^2$ を

$$p(z_1, z_2) = \left(2|z_1|^2 - 1, 2z_1\overline{z_2} \right)$$

で定義する。まず p が well-defined, つまり

$$(z_1, z_2) \in S^3 \Longrightarrow p(z_1, z_2) \in S^2$$

を確かめなければならないが, これは簡単な計算でわかるので, 読者の練習問題としておく。明らかに, p は連続である。

次に, 局所自明化写像を見つけなければならない。

$$
\begin{aligned}
U_+ &= S^2 - \{(1, 0)\} \\
U_- &= S^2 - \{(-1, 0)\}
\end{aligned}
$$

と置く。U_+ も U_- も S^2 の開部分集合であり $S^2 = U_+ \cup U_-$ である。 つまり S^2 のどの点も U_+ か U_- を開近傍として持つ。よって, 局所自明化写像の条件を満足する同相写像

$$
\begin{aligned}
\varphi_+ &: p^{-1}(U_+) \longrightarrow U_+ \times S^1 \\
\varphi_- &: p^{-1}(U_-) \longrightarrow U_- \times S^1
\end{aligned}
$$

を見つければ良い。まず $(z_1, z_2) \in p^{-1}(U_+)$ に対し

$$\varphi_+(z_1, z_2) = \left(2|z_1|^2 - 1, 2z_1\overline{z_2}, \tfrac{z_2}{|z_2|} \right)$$

と置く。ここで問題は, 最後の座標であるが,

$$
\begin{aligned}
\left(2|z_1|^2 - 1, 2z_1\overline{z_2} \right) \in U_+ &\Longrightarrow \left(2|z_1|^2 - 1, 2z_1\overline{z_2} \right) \neq (1, 0) \\
&\Longrightarrow z_2 \neq 0
\end{aligned}
$$

より φ_+ は well-defined で連続である。

φ_+ が同相であることを示すのに, 逆写像

$$\psi_+ : U_+ \times S^1 \longrightarrow p^{-1}(U_+)$$

を

$$\psi_+(x, z, w) = \left(\frac{zw}{2\sqrt{\frac{1-x}{2}}}, w\sqrt{\frac{1-x}{2}} \right)$$

で定義する。

演習問題 1.2.12. 同様に

$$\begin{aligned} \varphi_- &: p^{-1}(U_-) \longrightarrow U_- \times S^1 \\ \psi_- &: U_- \times S^1 \longrightarrow p^{-1}(U_-) \end{aligned}$$

を定義し, それらが互いに逆写像になっていることを示せ。

これにより $p : S^3 \to S^2$ がファイバーが S^1 のファイバー束であることが示された。これを *Hopf束* (*Hopf bundle*) という。 □

Möbius の帯は, 自明でないファイバー束のうちで最も簡単なものの一つであるが, それでもそれがファイバー束になることを示すのには, かなりの計算を要した。 Hopf束のように絵に描けないものになると, 局所自明化写像を見つけること自体が非常に難しい。 このように, 一般にある写像 $p : E \to B$ がファイバー束になることを直接示すのは容易ではない。たいていの場合, 局所自明化写像を具体的に書き下すのは不可能である。 これから本書では, ファイバー束の一般論を展開することにより, 与えられた空間の上にどの様なファイバー束が構成できるか調べていくことにしよう。

演習問題 1.2.13. S^2 の接束

$$p : TS^2 \longrightarrow S^2$$

がファイバー $\mathbb{R}^2$ のファイバー束になっていることを示せ。

2　ファイバー束と位相群

2.1　構造群を持ったファイバー束

§1.2の定義 1.2.5 によると, $p : E \to B$ がファイバー F のファイバー束であるとは, B の開被覆 $B = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ と各 α について同相写像 (局所自明化写像)

$$\varphi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\cong} U_\alpha \times F$$

で

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(U_\alpha) \arrow[rr, "\varphi_\alpha"] \arrow[dr, "p"'] & & U_\alpha \times F \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\
& U_\alpha &
\end{tikzcd}$$

を可換にするものが存在することであった。しかしながら, 例 1.2.11 でみたように, 写像 p がファイバー束になっていることを, この定義だけから確かめるのは容易ではない。 局所自明化を見つけるのは簡単ではないのである。 球面のように簡単な底空間の場合であれだけ複雑だったのだから, 他の空間の場合は推して知るべし, である。

そこで一般の場合を考えるのではなく, ファイバー束に何か条件を付けて考えることにしよう。 条件を付けるのは, もちろん一番難しい部分, つまり局所自明化写像である。 それにどういう条件をつけたら良いかを考えるために, 局所自明化写像の意味を考えてみよう。

まず注意することは, $E = \bigcup_{\alpha \in A} p^{-1}(U_\alpha)$ より, 同相

$$p^{-1}(U_\alpha) \cong U_\alpha \times F$$

を用いると, このファイバー束の全空間 E は

$$E \cong \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \times F \tag{2.1}$$

というふうに書けることである。ただし, この式の右辺は正確な表記ではなく, 大体の感じを表わしているだけであるが。 つまりファイバー束の全空間は, 自明なファイバー束を貼り合わせてできていると考えられる。 では, 貼り合わせとは何だろう。

一度に全部貼り合わせるのではなく, まず二つ, 例えば $U_\alpha \times F$ と $U_\beta \times F$ を貼り合わせることを考えよう。

(2.1) によると, まず

$$\begin{aligned} U_\alpha \times F &\cong p^{-1}(U_\alpha) \\ U_\beta \times F &\cong p^{-1}(U_\beta) \end{aligned}$$

という同相 (局所自明化写像) で $p^{-1}(U_\alpha)$ と $p^{-1}(U_\beta)$ という形にして, それらの和集合を取るというのが貼り合わせである。 具体的にどの点とどの点が貼り合わさっているかを見るために, 上の局所自明化写像に名前をつけ

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha &: p^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times F \\ \varphi_\beta &: p^{-1}(U_\beta) \longrightarrow U_\beta \times F \end{aligned}$$

としよう。すると $(x,y) \in U_\alpha \times F$ と $(x',y') \in U_\beta \times F$ に対し, (x,y) と (x',y') が貼り合わされている, つまり E の中で同じ点に写っているのは

$$\varphi_\alpha^{-1}(x,y) = \varphi_\beta^{-1}(x',y')$$

である時である。図示すると, 図 2.1 のようになる。

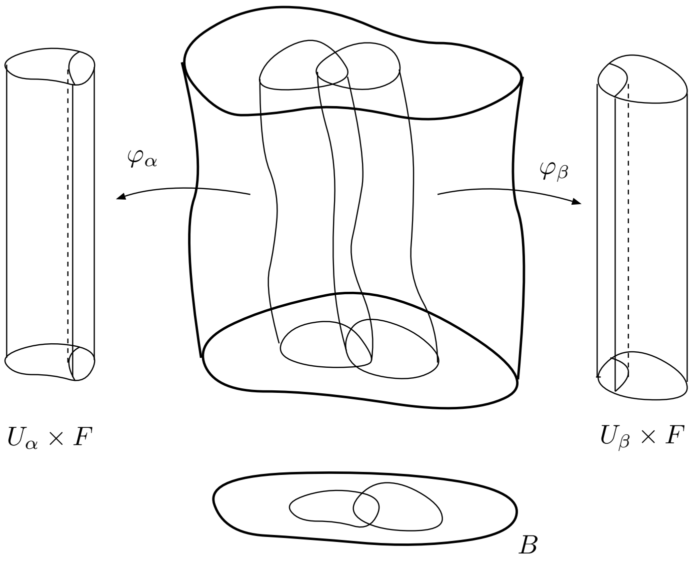


図 2.1: 局所的な貼り合せ

以上のことをより正確にまとめて書くと次のようになる: $U_\alpha \times F \amalg U_\beta \times F$ に次の関係「$\sim$」を定義する。

$$(x,y) \sim (x',y') \Longleftrightarrow \varphi_\alpha^{-1}(x,y) = \varphi_\beta^{-1}(x',y') \tag{2.2}$$

この関係を同値関係に拡張し, その同値関係よる商空間

$$(U_\alpha \times F \amalg U_\beta \times F)/\sim$$

が $U_\alpha \times F$ と $U_\beta \times F$ を貼り合わせたものであると考えられる。 よって「貼り合わせ方にある条件をつける」とは, この同値関係に条件をつけることである。

しかし同値関係のような抽象的なものは扱いづらいので, もっと具体的なものに直したい。 ここで注意するのは上の関係 (2.2) は

$$(x, y) \sim (x', y') \iff \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, y) = (x', y')$$

と書けることである。こうすると二つの写像 φ_α と φ_β を考える代わりに $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 一つだけでよくなる。次の図式で考えると

$$\begin{tikzcd}
(U_\alpha \cap U_\beta) \times F \arrow[rr, "\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}"] & & (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \\
& p^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \arrow[ul, "\varphi_\alpha"] \arrow[ur, "\varphi_\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

(x, y) と (x', y') が同値がどうか考えるのに, いちいち斜めの写像で $p^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ まで降りてまた上がってこなくても, 横にすっと動けば良いのである。この意味で $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ を貼り合わせの写像と言っても良いだろう。この写像 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ をもう少し詳しく考えてみよう。

補題 2.1.1. 任意の $(x, y) \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times F$ に対し, $(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(x, y) \in \{x\} \times F$ である。

証明. $(x, y) \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times F$ に対し

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, y) \in \{x\} \times F$$

を示すためには,

$$\mathrm{pr}_1 \circ \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, y) = x$$

を示せば良い。ここで pr_1 は第 1 成分への射影である。

局所自明化写像の定義から

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(U_\beta) \arrow[r, "\varphi_\beta"] \arrow[dr, "p"'] & U_\beta \times F \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\
& U_\beta
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
U_\alpha \times F \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & p^{-1}(U_\alpha) \arrow[l, "\varphi_\alpha"'] \arrow[dl, "p"] \\
U_\alpha &
\end{tikzcd}$$

という可換図式を得るが, これを使うと

$$\begin{aligned}
\mathrm{pr}_1 \circ \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, y) &= p \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, y) \\
&= \mathrm{pr}_1(x, y) \\
&= x
\end{aligned}$$

となり, 求める式が示された。 □

定義 2.1.2. 上の補題の状況の下で

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x,y) = \big(x, \Phi^{\alpha\beta}(x)(y)\big)$$

と書き, $\Phi^{\alpha\beta}(x)$ を $y \in F$ に対し $\Phi^{\alpha\beta}(x)(y) \in F$ を対応させる写像と考える。つまり,

$$\Phi^{\alpha\beta}(x)(y) = \mathrm{pr}_2 \circ \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x,y)$$

と定義する。

補題 2.1.3. 任意の $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ に対し, 写像

$$\Phi^{\alpha\beta}(x) : F \longrightarrow F$$

は同相写像になる。

証明. φ_α と φ_β が同相写像だから, それらの制限として $\varphi_\beta|_{p^{-1}(x)}$ と $\varphi_\alpha^{-1}|_{\{x\}\times F}$ も同相写像。よって,

$$\Phi^{\alpha\beta}(x) = \mathrm{pr}_2 \left(\varphi_\beta|_{p^{-1}(x)}\right) \circ \left(\varphi_\alpha^{-1}|_{\{x\}\times F}\right) \circ i_x$$

も同相写像である。ただし, $i_x : F \to \{x\} \times F$ は $i_x(y) = (x,y)$ で定義される写像である。 □

これで $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ に対し, 同相写像 $\Phi^{\alpha\beta}(x)$ を与える対応が得られた。この対応の定義域は $U_\alpha \cap U_\beta$ であるが, 値域にも名前をつけることにしよう。

定義 2.1.4. 位相空間 X に対し

$$\mathrm{Homeo}(X) = \{f : X \to X \mid \text{同相写像}\}$$

と定義する。

すぐわかることは次のことである。

命題 2.1.5. $\mathrm{Homeo}(X)$ は写像の合成により群になる。

演習問題 2.1.6. これを確かめよ。

この記号を用いると, ファイバー束での局所的な貼り合わせは

$$\Phi^{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{Homeo}(F)$$

と言う写像達によって与えられると思って良い。

定義 2.1.7. これらの写像 $\{\Phi^{\alpha\beta}\}$ をファイバー束の座標変換 (*coordinate transformation*) という。

ファイバー束の貼り合わせ方を制限するということ, つまり (2.2) という同値関係に制限を付けるということは, これら座標変換の値域を制限することに他ならない。 そこで次の定義を考えよう。

定義 2.1.8 (構造群の仮の定義). G を $\mathrm{Homeo}(F)$ の部分群とするとき, ファイバー束 (B, E, F) が G を**構造群** (*structure group*) とするファイバー束であるとは, その座標変換 $\Phi^{\alpha\beta}$ が任意の α, β に対し G に値を持つことである。図式で言えば,

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "\text{inclusion}"] & & \mathrm{Homeo}(F) \\
& U_\alpha \cap U_\beta \arrow[ul, dotted, "{}^{\exists}\overline{\Phi}^{\alpha\beta}"] \arrow[ur, "\Phi^{\alpha\beta}"'] &
\end{tikzcd}$$

が可換になるような写像 $\overline{\Phi}^{\alpha\beta}$ が存在することである。

この定義を良くみると, いくつか疑問が湧いてくるのではないだろうか (そうであってほしい)。 例えば次のようなことが考えられる。

1. どうして G は群でなければならないのだろう。 貼り合わせ方を制限するだけなら $\mathrm{Homeo}(F)$ の部分集合で十分であるはずである。 部分群として定義したのには, 何か理由があるのだろうか。

2. H を $\mathrm{Homeo}(F)$ の部分群で G を部分群として含んでいるものとする。
$$G \subset H \subset \mathrm{Homeo}(F)$$
すると G を構造群とするファイバー束は H も構造群として持つことになる。 つまり構造群はファイバー束に対し一意的には決まらないのである。普通は, その中で最も小さいものを構造群という場合が多いのであるが。

演習問題 2.1.9. 上の 1. を考えよ。つまり構造群を持ったファイバー束の定義で, G はどうして群でなければならない, あるいは, 群であった方がよいのか考えよ。 (ヒント:

$$\begin{aligned}
U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma &= (U_\alpha \cap U_\beta) \cap (U_\beta \cap U_\gamma) \\
U_\alpha \cap U_\beta &= U_\beta \cap U_\alpha
\end{aligned}$$

を考える。)

この定義では, $\mathrm{Homeo}(X)$ の位相や包含写像 $G \hookrightarrow \mathrm{Homeo}(X)$ や $\overline{\Phi}^{\alpha\beta}$ の連続性について何も言っていないので, 実際の幾何学的な応用には適さない。より精密な構造群の定義は, §2.4 で与える。

しかし, 構造群の感覚を得るにはこの定義で十分なので, この定義に基づいた例をいくつか見る事にしよう。

例 2.1.10. まず自明束の場合を考える。$E \cong B \times F \to B$ を自明束とするとき, 局所自明化写像は $E \cong B \times F$ 一つしかない。よって, 座標変換は $B \times F$ から $B \times F$ への恒等写像によって定義されているもの, すなわち F から F への恒等写像のみである。故に, 自明束は自明な群（単位元だけからなる群）を構造群に持つと考えられる。 □

例 2.1.11. 例 1.2.8 の Möbiusの帯 $M \to S^1$ を考える。底空間 S^1 の開被覆は, 図 1.7 のように

$$
\begin{aligned}
S^1 &= U_1 \cup U_2 \\
U_1 &= \{(\cos\theta, \sin\theta) \mid 0 < \theta < 2\pi\} \\
&= S^1 - \{(1,0)\} \\
U_2 &= \{(\cos\theta, \sin\theta) \mid \pi < \theta < 3\pi\} \\
&= S^1 - \{(-1,0)\}
\end{aligned}
$$

で与えられていた。

また局所自明化

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 &: p^{-1}(U_1) \longrightarrow U_1 \times [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}] \\
\varphi_2 &: p^{-1}(U_2) \longrightarrow U_2 \times [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}]
\end{aligned}
$$

は次の図 2.2 のように与えられていた。

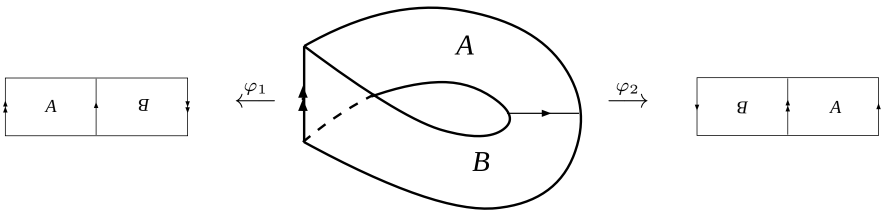


図 2.2: Möbiusの帯の局所自明化

$U_1 \cap U_2$ は二つの連結成分から成るが, 図 2.2 で上側の連結成分を A, 下側を B とおく。

座標変換

$$\Phi^{12} : U_1 \cap U_2 \longrightarrow \mathrm{Homeo}([-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}])$$

は写像

$$(U_1 \cap U_2) \times [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}] \xrightarrow{\varphi_1^{-1}} p^{-1}(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\varphi_2} (U_1 \cap U_2) \times [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}]$$

で定まるが,

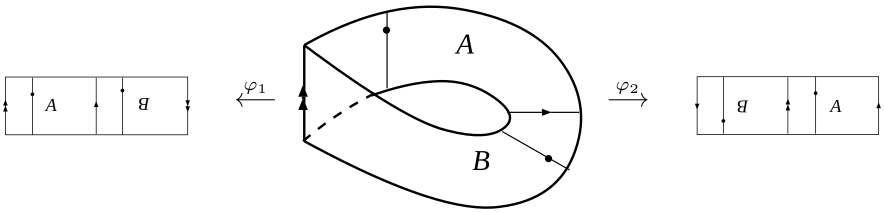


図 2.3: Möbiusの帯の座標変換

図 2.3 から

$$\Phi^{12}(x)(t) = \begin{cases} t, & x \in A,\, t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \text{ のとき} \\ -t, & x \in B,\, t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \text{ のとき} \end{cases}$$

となる。ここで $g(t) = -t$ とおくと, $g \in \mathrm{Homeo}([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$ であり, Φ^{12} は $\{1_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}, g\}$ に値を持つ。

$$\Phi^{12} : U_1 \cap U_2 \longrightarrow \left\{1_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}, g\right\}$$

また

$$g \circ g(t) = g(-t) = -(-t) = t$$

より, $\left\{1_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}, g\right\}$ は位数 2 の巡回群 C_2 である。よって Möbius の帯の構造群は, C_2 である。 □

円筒 A も Möbius の帯 M も共に底空間が S^1 で, ファイバーが $I \cong \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$ のファイバー束である。 しかし構造群は前者が自明な群, 後者が C_2 であり, 円筒が自明なファイバー束であり, Möbius の帯には一回捻りが入っているという事実を反映している。 次節では, 構造群, あるいはより一般に, 群について考えることにしよう。

2.2 位相群

前節で見たように, 構造群を調べるとファイバー束のことが何かわかりそうである。 構造群は座標変換により定義されていたが, 座標変換とは

$$\Phi^{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{Homeo}(F)$$

という写像のことであった。ここで $\Phi^{\alpha\beta}$ の定義域 $U_\alpha \cap U_\beta$ は位相空間であるし, またもともと $\Phi^{\alpha\beta}$ は φ_α, φ_β という連続写像により定義されていた。このことから $\mathrm{Homeo}(F)$ に位相を入れ位相空間として考えることは自然である。更に, 構造群を導入した動機が座標変換に制限をつけて扱い易くすることだったとすると, 座標変換にある種の連続性を仮定するのは不合理なことではない。 そのためには, $\mathrm{Homeo}(F)$, そして構造群 G に位相を入れて位相群として扱うべきである。 この節では位相群の基本的性質を考える。

まず群の定義を思い出そう。最も簡潔な定義は次のものである。

定義 2.2.1. 群 (*group*) とは

- 集合 G
- 特別な元 $e \in G$
- 写像

$$
\begin{aligned}
\mu &: G \times G \longrightarrow G \\
\nu &: G \longrightarrow G
\end{aligned}
$$

からなり, 次の条件を満たすものである。

1. 任意の $g \in G$ に対し $\mu(e,g) = \mu(g,e) = g$, つまり

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "1_G \times c_e"] \arrow[dr, equal] & G \times G \arrow[d, "\mu"] & G \arrow[l, "c_e \times 1_G"'] \arrow[dl, equal] \\
& G &
\end{tikzcd}
$$

   が可換になる, ここで

$$c_e : G \longrightarrow G$$

   は元 e への定値写像である。

2. 任意の $g, h, k \in G$ に対し $\mu(\mu(g,h),k) = \mu(g,\mu(h,k))$, つまり

$$
\begin{tikzcd}
G \times G \times G \arrow[r, "\mu \times 1_G"] \arrow[d, "1_G \times \mu"'] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\
G \times G \arrow[r, "\mu"] & G
\end{tikzcd}
$$

   が可換になる。

3. 任意の $g \in G$ に対し $\mu(\nu(g), g) = \mu(g, \nu(g)) = e$, つまり

$$
\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[d, "\mu"'] & G \times G \arrow[l, "1_G \times \nu"'] \arrow[r, "\nu \times 1_G"] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\
G & G \arrow[l, "c_e"'] \arrow[r, "c_e"] \arrow[u, "\Delta"] & G
\end{tikzcd}
$$

   が可換になる, ここで Δ は対角写像である。

e を**単位元**, $\mu(g,h) = g \cdot h$ と書き g と h の**積**, $\nu(g) = g^{-1}$ と書き g の**逆元**という。また μ, ν を G の**構造写像** (*structure map*) という。

この定義は, 普通の群論の教科書に最初に出てくるものとは異なるかも知れないが, 同じ定義を与えることはすぐにわかるはずである。 この定義を用いるのは, 位相群を次のように定義したいからである。

定義 2.2.2. 群 G が同時に位相空間でもあり, G の構造写像 μ と ν が共に連続写像であるとき, G は位相群 (*topological group*) であると言う。

位相群の簡単な例としては, 次のようなものがある。

例 2.2.3. $G = \mathbb{R}$ の時,

$$\begin{aligned} e &= 0 \\ \mu(x,y) &= x+y \\ \nu(x) &= -x \end{aligned}$$

と置くと $\mathbb{R}$ は位相群になる。 □

例 2.2.4. $G = \mathbb{R}^{\times} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ とする。

$$\begin{aligned} e &= 1 \\ \mu(x,y) &= xy \\ \nu(x) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

により $\mathbb{R}^{\times}$ は位相群になる。 □

例 2.2.5. $\mathbb{R}^{\times}$ の部分空間 $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ も実数の積で位相群になる。 □

例 2.2.6. $\mathbb{C}^{\times} = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}$ は複素数の積により位相群となる。 その部分空間である単位円周 $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ も同様に位相群になる。 □

行列から定義される位相群は非常に重要である。

例 2.2.7. $M_n(\mathbb{R}) = \{$実数値 $n \times n$ 行列$\}$ を考える。 集合としては

$$M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$$

と考えることができる。この同一視によって $M_n(\mathbb{R})$ を位相空間とみなす。

$$\begin{aligned} e &= O & &(0\text{行列}) \\ \mu(A,B) &= A+B \\ \nu(A) &= -A \end{aligned}$$

により $M_n(\mathbb{R})$ は位相群になる。

例2.2.3 は $n = 1$ の時である。 □

例 2.2.8. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$ は $M_n(\mathbb{R})$ の部分空間として位相空間になる。

$$\begin{aligned} e &= E_n \quad (\text{単位行列}) \\ \mu(A,B) &= AB \\ \nu(A) &= A^{-1} \quad (\text{逆行列}) \end{aligned}$$

と置く。

これにより $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ は位相群になる。これを n次実一般線形群 (*general linear group*) という。

例2.2.4は, $n=1$ の時である。 □

演習問題 2.2.9. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の μ, ν が連続であることを証明せよ。

例 2.2.10. $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ とおく。μ, ν を上の例の $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の位相群の structure map とすると, 行列式の性質より

$$\begin{aligned} \mu(\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}))) &\subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \\ \nu(\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})) &\subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

となる。よって μ, ν の制限により, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ は位相群になる。これを n次実特殊線形群 (*special linear group*) という。 □

例 2.2.11. $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = E_n\}$ と置く。$O(n)$ は行列の積により位相群になる。これを n次直交群 (*orthogonal group*) という。 □

例 2.2.12. 同様に $\mathrm{SO}(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\} = O(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ も行列の積で位相群になる。これをn次特殊直交群 (*special orthogonal group*) という。 □

演習問題 2.2.13. $O(n)$, $\mathrm{SO}(n)$ が行列の積で位相群になることを示せ。

例 2.2.14. 上の五つの例の複素数版がある。

$$\begin{aligned} M_n(\mathbb{C}) &= \{\text{複素数値 } n \times n\text{行列}\} \\ \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) &= \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \det A \neq 0\} \\ \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) &= \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \det A = 1\} \\ U(n) &= \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid {}^t\overline{A}A = E_n\} \\ \mathrm{SU}(n) &= \{A \in U(n) \mid \det A = 1\} \end{aligned}$$

$M_n(\mathbb{C})$ は行列の和により, そして残りは行列の積により位相群となる。

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $U(n)$, $\mathrm{SU}(n)$ はそれぞれ, 複素一般線形群, 複素特殊線形群, ユニタリ群 (*unitary group*), 特殊ユニタリ群 (*special unitary group*) と呼ばれる。 □

演習問題 2.2.15. $U(n)$ が位相群になっていることを示せ。

例 2.2.16. $\mathbb{H}$ を *Hamilton*の四元数 (*quaternion*) とする。つまり $\mathbb{R}$ 上 $\{1, i, j, k\}$ を基底にもつベクトル空間で, 1 を単位元とする積を

$$\begin{aligned} i^2 &= -1 \\ j^2 &= -1 \\ k^2 &= -1 \\ ij &= -ji = k \\ jk &= -kj = i \\ ki &= -ik = j \end{aligned}$$

で定義したものである。$\mathbb{H}$ の積は非可換であるが結合法則をみたし, 0 以外の元はすべて逆元を持つことがわかる。よって

$$\mathbb{H}^\times = \mathbb{H} - \{0\}$$

は位相群になる。 □

演習問題 2.2.17. これを示せ。

例 2.2.18. $\mathbb{H}$ の積は可換ではないので, $M_n(\mathbb{H})$ の元に対し行列式を定義することは難しい。よって $\mathrm{SL}_n(\mathbb{H})$ などは定義されないが $\mathrm{GL}_n(\mathbb{H})$ と直交群やユニタリ群の類似は定義できる。すなわち

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_n(\mathbb{H}) &= \{A \in M_n(\mathbb{H}) \mid \text{逆行列を持つ}\} \\ \mathrm{Sp}(n) &= \{A \in M_n(\mathbb{H}) \mid {}^t\overline{A}A = A{}^t\overline{A} = E_n\} \end{aligned}$$

と定義する。 ここで, $a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ に対し

$$\overline{a + bi + cj + dk} = a - bi - cj - dk$$

である。 □

演習問題 2.2.19. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{H})$ と $\mathrm{Sp}(n)$ が位相群になっていることを示せ。

注意 2.2.20. $\mathbb{H}$ は $\mathbb{C}$ に j という $j^2 = -1$ である元を追加してできたものである。 これは, $\mathbb{R}$ に i を追加して $\mathbb{C}$ を得た手順と同じである。 そこで $\ell^2 = -1$ となる元を $\mathbb{H}$ に追加して 8次元の実ベクトル空間に積を定義しようというのは自然なアイデアである。

実際, Hamilton の四元数の発見に刺激されて, John Graves という人が 1843年に八元数 (*octonion*) $\mathbb{O}$ を考えている。 八元数は, 1845年に Graves とは独立に Author Cayley によっても発見されたので, Cayley数と呼ばれることが多い。

八元数の積は可換どころか結合法則も満たさないので, $\mathbb{O}^{\times} = \mathbb{O} - \{0\}$ は群にはならない。$\mathrm{GL}_n(\mathbb{O})$ などは当然ダメである。ただし, 八元数からは別の方法で重要な位相群 (Lie 群) が定義される。詳しくは, 横田の本 [横田一71] などを見られたい。

上の例の中で, 例えば $SL_n(\mathbb{R})$ は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ に含まれ群の演算も $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の群の演算を制限したもので定義されている。

定義 2.2.21. G が位相群で H をその部分空間とする。G の群演算の制限により H が位相群になるとき, H は G の**部分群**であるという。更に H が G の閉集合であるとき, H は G の**閉部分群**であるという。

注意 2.2.22. μ と ν を G の構造写像としたときに, H が G の部分群であるという条件は, $\mu(H \times H) \subset H$ かつ $\nu(H) \subset H$ と同値である。

例 2.2.23. 次の包含はすべて閉部分群を与えている。

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{R}_{>0} & \subset & \mathbb{R}^{\times} \\
S^1 & \subset & \mathbb{C}^{\times} \\
\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) & \subset & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\
\mathrm{SO}(n) & \subset & O(n) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\
\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) & \subset & \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \\
U(n) & \subset & \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \\
\mathrm{SU}(n) & \subset & U(n) \\
\mathrm{Sp}(n) & \subset & \mathrm{GL}_n(\mathbb{H}) \\
\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) & \subset & \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{H}) \\
O(n) & \subset & U(n) \subset \mathrm{Sp}(n)
\end{array}$$

ここで最後の二行は

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$$

という包含によって誘導されたものである。 $\square$

演習問題 2.2.24. これを確かめよ。

任意の集合は, 離散位相により位相空間とみなすことができる。それにより, 任意の群は位相群になる。

命題 2.2.25. G を任意の群とする。G に離散位相を入れ位相空間とすると G は位相群になる。

演習問題 2.2.26. これを示せ。

時には見かけの全然違うふたつの群が, 非常によく似た性質を持つことがある。 ふたつの群の構造を比較するために, 次の概念を用いる。

定義 2.2.27. G, H を群とする。G から H への**準同型** (*homomorphism*) とは, 写像

$$f : G \longrightarrow H$$

で図式

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{\mu_G} & G \\ {\scriptstyle f\times f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ H \times H & \xrightarrow{\mu_H} & H \end{array}$$

を可換にするものである。 ここで μ_G, μ_H はそれぞれ G, H の群の積である。

G, H が位相群で準同型 f が連続の時, f を位相群の準同型という。

更に準同型 $g : H \to G$ があり

$$f \circ g = 1_H, \quad g \circ f = 1_G$$

のとき, f は**同型写像** (isomorphism), G は H と**同型**であると言い

$$G \cong H$$

と書く。G, H が位相群, f が位相群の準同型で g も位相群の準同型に取れるとき, G と H は位相群として**同型**であるという。

注意 2.2.28. G, H が位相を持たない群で

$$f : G \longrightarrow H$$

が準同型の時,

$$f \text{ が同型写像} \Longleftrightarrow f \text{ が全単射}$$

である。しかし G, H が位相群で

$$f : G \longrightarrow H$$

が位相群の準同型のとき, f が全単射でも位相群の同型写像であるとは限らない。例えば $\mathbb{R}_\delta$ を $\mathbb{R}$ に離散位相を入れたものとし, $\mathbb{R}$ を普通の位相を入れたものとすると, 恒等写像

$$f : \mathbb{R}_\delta \longrightarrow \mathbb{R}$$

は全単射である位相群の準同型写像である。しかし f の逆写像は連続ではないので f は位相群の同型写像ではない。

例 2.2.29. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ を $f(x) = e^x$ で定める。このとき f は位相群の準同型である。実際, f は同型である。 □

例 2.2.30. $f : \mathbb{R} \to S^1$ を $f(x) = e^{2\pi i x}$ で定める。f は位相群の準同型であるが同型ではない。 □

例 2.2.31. 線形代数で学んだように, 行列式により与えられる写像

$$\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^\times$$

は位相群の準同型である。 □

演習問題 2.2.32. $r : S^1 \to \mathrm{SO}(2)$ を

$$r(e^{i\theta}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

で定義する。SO(2) の元はすべて $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ の形に書けることを示し, r が位相群の同型であることを示せ。

例 2.2.33. 上の演習問題の写像は次のように一般化できる。$A \in M_n(\mathbb{C})$ を実行列 A_0, A_1 により

$$A = A_0 + A_1 i$$

と表わして

$$r(A) = \begin{pmatrix} A_0 & -A_1 \\ A_1 & A_0 \end{pmatrix}$$

により

$$r : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_{2n}(\mathbb{R})$$

を定義する。このとき r の制限は単射準同型

$$r : \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$$

になる。つまり r により $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ は $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ の閉部分群とみなすことができる。 同様に以下の閉部分群の包含がある。

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) &\subset \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}) \\ \mathrm{GL}_n(\mathbb{H}) &\subset \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C}) \\ U(n) &\subset O(2n) \\ \mathrm{Sp}(n) &\subset U(2n) \end{aligned}$$

□

演習問題 2.2.34. これを示せ。

演習問題 2.2.32 を「複素化」すると次を得る。

演習問題 2.2.35. 位相群の同型 $\mathrm{SU}(2) \cong \mathrm{Sp}(1)$ があることを示せ。(ヒント:

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \middle| \ a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$$

を示す。)

演習問題 2.2.36. $\mathrm{SU}(2)$ は位相空間として S^3 と同相であることを示せ。

演習問題 2.2.37. $\mathrm{SU}(2)$ から $\mathrm{SO}(3)$ への位相群の全射準同型を見つけよ。(ちょっと難しい。) またその kernel が位数2の群であることを示せ。

群の間に全射準同型があると準同型定理を適用したくなるが, 位相群の場合の準同型定理の一つの形として, §2.5で定理 2.5.34を考える。

2.3 コンパクト開位相

さてファイバー束の話に戻ろう。

$$p : E \longrightarrow B$$

を F をファイバーとするファイバー束とし

$$\Phi^{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{Homeo}(F)$$

を座標変換とする。§2.1 の定義によると, $\mathrm{Homeo}(F)$ の部分群 G で

$$\mathrm{Im}\,\Phi^{\alpha\beta} \subset G$$

であるものをこのファイバー束の構造群と呼んだのだった。

この $\Phi^{\alpha\beta}$ という写像は, 元々連続写像によって定義されているので $\mathrm{Homeo}(F)$ に位相を入れ連続写像になるようにするのが自然である。また $\mathrm{Homeo}(F)$ は写像の合成で群になるから, その位相で $\mathrm{Homeo}(F)$ が位相群になってくれるとうれしい。 つまり次の二つをみたすように $\mathrm{Homeo}(F)$ に位相を入れたい。

1. $\Phi^{\alpha\beta}$ が連続になる。

2. $\mathrm{Homeo}(F)$ が写像の合成で位相群になる。

まず条件1について考えよう。

$$\Phi^{\alpha\beta}(x) : F \longrightarrow F$$

は合成

$$(U_\alpha \cap U_\beta) \times F \xrightarrow{\varphi_\alpha^{-1}} p^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \xrightarrow{\varphi_\beta} (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} F$$

を考え

$$\Phi^{\alpha\beta}(x)(y) = \mathrm{pr}_2 \circ \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, y)$$

として定義されていた。つまり「2変数」の写像 $\mathrm{pr}_2 \circ \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ で最初の座標を固定し, 2番目の座標を変数と考えてできたのが

$$\Phi^{\alpha\beta}(x) : F \longrightarrow F$$

である。

より一般に次の構成を考える。

定義 2.3.1. 写像

$$\varphi : X \times Y \longrightarrow Z$$

が与えられているとき, $x \in X$ を固定し

$$\mathrm{ad}(\varphi)(x) : Y \longrightarrow Z$$

を

$$\mathrm{ad}(\varphi)(x)(y) = \varphi(x, y)$$

で定義する。

補題 2.3.2. $\varphi : X \times Y \to Z$ が連続なら任意の $x \in X$ に対し

$$\mathrm{ad}(\varphi)(x) : Y \longrightarrow Z$$

も連続である。

証明. $\mathrm{ad}(\varphi)(x)$ が Y の各点 y で連続, つまり $\mathrm{ad}(\varphi)(x)(y)$ の任意の開近傍 U に対し, y の開近傍 V で

$$\mathrm{ad}(\varphi)(x)(V) \subset U$$

であるものを見つければよい。

ここで

$$\mathrm{ad}(\varphi)(x)(y) = \varphi(x, y)$$

だから $\varphi(x, y) \in U$ かつ φ が連続であることより (x, y) の $X \times Y$ での開近傍 $W \times V$ で

$$\varphi(W \times V) \subset U$$

であるものが存在する。ここで直積位相の定義より, (x, y) の開近傍として x と y の開近傍の直積であるものが取れるという事実を使ったことに注意しておく。

すると
$$\mathrm{ad}(\varphi)(x)(V) = \varphi(\{x\} \times V) \subset \varphi(W \times V) \subset U$$
となり $\mathrm{ad}(\varphi)(x)$ の連続性が示された。 □

定義 2.3.3. 位相空間 X, Y に対し
$$\mathrm{Map}(X,Y) = \{f : X \to Y \mid \text{連続}\}$$
と置く。この記号を使えば, 上の補題は
$$\varphi : X \times Y \longrightarrow Z$$
が連続なら任意の $x \in X$ に対し
$$\mathrm{ad}(\varphi)(x) \in \mathrm{Map}(Y,Z)$$
ということである。よって写像
$$\mathrm{ad}(\varphi) : X \longrightarrow \mathrm{Map}(Y,Z)$$
が定義される。これを φ の *adjoint* という。

ファイバー束の座標変換
$$\Phi^{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{Homeo}(F)$$
は合成
$$(U_\alpha \cap U_\beta) \times F \xrightarrow{\varphi_\alpha^{-1}} p^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \xrightarrow{\varphi_\beta} (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} F$$
の adjoint
$$\Phi^{\alpha\beta} = \mathrm{ad}(\mathrm{pr}_2 \circ \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{Map}(F,F)$$
である。たまたま
$$\mathrm{Im}\,\Phi^{\alpha\beta} \subset \mathrm{Homeo}(F)$$
だったから, 値域を $\mathrm{Homeo}(F)$ と考えただけだったのである。

そこでより一般に連続写像
$$\varphi : X \times Y \longrightarrow Z$$
に対し
$$\mathrm{ad}(\varphi) : X \longrightarrow \mathrm{Map}(Y,Z)$$
が連続になるように $\mathrm{Map}(Y,Z)$ に位相を入れたいのであるが, まずは天下り的に定義を与えてしまおう。

定義 2.3.4. Y, Z を位相空間とし, 部分空間 $K \subset Y$, $U \subset X$ に対し

$$W(K, U) = \{f : X \to Y \mid \text{連続}, f(K) \subset U\}$$

とおく。

$$\mathcal{B} = \{W(K, U) \mid K \subset X: \text{コンパクト}, U \subset Y: \text{開集合}\}$$

とし, $\mathcal{B}$ を開集合の準基底として $\mathrm{Map}(Y, Z)$ に位相を入れる。

つまり, コンパクト集合 $K \subset Y$ と開集合 $U \subset Z$ に対し $W(K, U)$ という形の部分集合から

1. 有限個の共通部分をとる
2. 1でできた集合の任意個の和集合をとる

という操作によりできた集合を開集合とする位相である。

これを $\mathrm{Map}(Y, Z)$ の**コンパクト開位相** (*compact-open topology*) という。

注意 2.3.5. 以後, 特に断らない限り連続写像の成す空間 $\mathrm{Map}(X, Y)$ には常にコンパクト開位相が入っているものとする。

この定義を見れば, 普通の人は, コンパクト開位相は複雑で取っつきにくいものだと思うだろうが, それはその通りで, 実際に使う際にも扱いづらいものである。ではどうしてこのような複雑な位相を入れるのか, またそれ以前に, どこからこのような位相が現れたのか疑問に思うかも知れない。コンパクト開位相の起源については, 本節の最後の「補足」を見てもらうとして, まずはこのコンパクト開位相が我々の欲しい性質を持っていることを確かめよう。

補題 2.3.6. *$\mathrm{Map}(Y, Z)$ にコンパクト開位相を入れるとき*

$$\varphi : X \times Y \longrightarrow Z$$

が連続ならその adjoint

$$\mathrm{ad}(\varphi) : X \longrightarrow \mathrm{Map}(Y, Z)$$

も連続である。

証明. 任意の $x \in X$ に対し, $\mathrm{ad}(\varphi)$ が x で連続であることを示す。$\mathrm{ad}(\varphi)(x)$ の開近傍 W に対し

$$\mathrm{ad}(\varphi)(V) \subset W$$

となる x の開近傍 V を見つければよい。ここでコンパクト開位相の定義から, W は Y のコンパクト集合 C と Z の開集合 U により $W(C, U)$ という形に書けている場合を証明すればよい。よって

$$\mathrm{ad}(\varphi)(x) \in W(C, U)$$

のとき

$$\mathrm{ad}(\varphi)(V) \subset W(C,U)$$

となる x の開近傍 V を見つければよい。

$\mathrm{ad}(\varphi)(x) \in W(C,U)$ より

$$\mathrm{ad}(\varphi)(x)(C) \subset U$$

つまり

$$\varphi(\{x\} \times C) \subset U$$

である。よって任意の $y \in C$ に対し

$$\varphi(x,y) \in U$$

となる。ここで φ の連続性と U が開であることから x の開近傍 V_y と y の開近傍 W_y で

$$\varphi(V_y \times W_y) \subset U$$

となるものが存在する。このとき

$$C \subset \bigcup_{y \in C} W_y$$

であり, C がコンパクトであることから W_y の中から有限個選んで

$$C \subset W_{y_1} \cup \cdots \cup W_{y_n}$$

とできる。そこで

$$V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i}$$

とおくと, 任意の $x \in V, y \in C$ に対し $y \in W_{y_i}$ となる i を選べば

$$(x,y) \in V \times W_{y_i} \subset V_{y_i} \times W_{y_i}$$

である。よって

$$\mathrm{ad}(\varphi)(x)(y) = \varphi(x,y) \in \varphi(V_{y_i} \times W_{y_i}) \subset U$$

となる。これで

$$\mathrm{ad}(\varphi)(V)(C) \subset U$$

すなわち

$$\mathrm{ad}(\varphi)(V) \subset W(C,U)$$

が示された。 □

系 2.3.7. F をファイバーとするファイバー束において $\mathrm{Homeo}(F)$ を $\mathrm{Map}(F,F)$ の部分空間として位相空間とみなせば, その任意の座標変換

$$\Phi^{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{Homeo}(F)$$

は連続である。

これでコンパクト開位相が, 我々の欲しい性質の内, 最初のものをみたすことがわかった。次の問題は, Homeo(F) がコンパクト開位相で位相群になるかどうかである。 つまり写像の合成と逆写像を対応させる写像

$$\begin{aligned}\mu &: \mathrm{Homeo}(F)\times\mathrm{Homeo}(F)\longrightarrow\mathrm{Homeo}(F)\\ \nu &: \mathrm{Homeo}(F)\longrightarrow\mathrm{Homeo}(F)\end{aligned}$$

がコンパクト開位相で連続かということである。

実はこれは一般にはウソである。F に少し条件をつけなければならない。

定義 2.3.8. 位相空間 X が局所コンパクト (*locally compact*) であるとは, 任意の点 $x\in X$ とその開近傍 V に対し, x の開近傍 U で閉包 $\overline{U}$ がコンパクトかつ $\overline{U}\subset V$ であるものが取れることである。

定理 2.3.9. X,Y,Z を位相空間とし Y が局所コンパクト *Hausdorff* であると仮定する。このとき写像の合成で定義される写像

$$\mu:\mathrm{Map}(Y,Z)\times\mathrm{Map}(X,Y)\longrightarrow\mathrm{Map}(X,Z)$$

は連続である。

系 2.3.10. X が局所コンパクト*Hausdorff* なら

$$\mu:\mathrm{Homeo}(X)\times\mathrm{Homeo}(X)\longrightarrow\mathrm{Homeo}(X)$$

は連続である。

この定理の証明には少し準備が必要である。

定義 2.3.11. Hausdorff空間 X について, X が 正則 (*regular*) であるとは, 任意の $x\in X$ と閉集合 $A\subset X$ で

$$x\notin A$$

であるものに対し, X の開集合 U,V で

$$\begin{aligned}x &\in U\\ A &\subset V\\ U\cap V &= \phi\end{aligned}$$

であるものが存在することである。

命題 2.3.12. 局所コンパクト *Hausdorff* 空間は正則である。

証明. 位相空間論の教科書ならどれでも書いてあるだろう。例えば [松坂和68] を見るとよい。 □

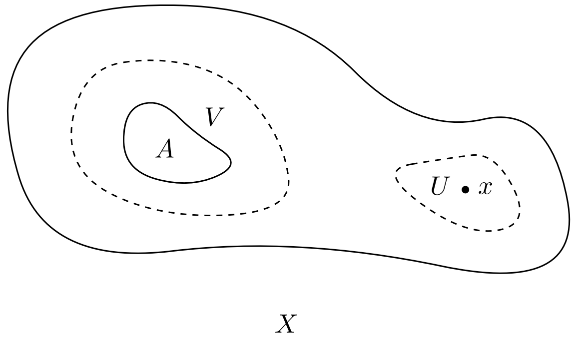


図 2.4: 正則空間

定理 2.3.9 の証明. 任意の $(f,g) \in \mathrm{Map}(Y,Z) \times \mathrm{Map}(X,Y)$ と $\mu(f,g)$ の開近傍 W に対し, (f,g) の開近傍 W' で
$$\mu(W') \subset W$$
となるもの, つまり
$$(f,g) \in W' \subset \mu^{-1}(W)$$
となるものを見つければよい。

コンパクト開位相の定義から, コンパクト集合 $C \subset X$ と開集合 $U \subset Z$ により
$$W = W(C,U)$$
と書けると仮定してよい。すると
$$\begin{aligned}
\mu(f,g) \in W &\iff \mu(f,g) \in W(C,U) \\
&\iff f \circ g \in W(C,U) \\
&\iff f(g(C)) \subset U \\
&\iff g(C) \subset f^{-1}(U) \\
&\iff y \notin Y - f^{-1}(U) \text{ for } y \in g(C)
\end{aligned}$$
である。

ここで Y は局所コンパクト Hausdorff だから, 上の命題より Y は正則となる。よって $y \in g(C)$ に対し, y の開近傍 V_y と $Y - f^{-1}(U)$ を含む開集合 W_y で
$$V_y \cap W_y = \phi$$
となるものが存在する。すると
$$V_y \subset Y - W_y \subset f^{-1}(U)$$

であり, $Y - W_y$ は閉だから

$$\overline{V}_y \subset Y - W_y \subset f^{-1}(U)$$

である。また Y は局所コンパクトだから $\overline{V}_x$ はコンパクトであると仮定してよい。

まとめると, 任意の $y \in g(C)$ に対し y の開近傍 V_y で

$$\begin{array}{ccc} \overline{V}_y & : & \text{compact} \\ \overline{V}_y & \subset & f^{-1}(U) \end{array}$$

であるものが存在することがわかった。

全ての $y \in g(C)$ について和集合を取ると

$$g(C) \subset \bigcup_{y \in g(C)} V_y \subset \bigcup_{y \in g(C)} \overline{V}_y \subset f^{-1}(U)$$

となるが, C がコンパクトで g が連続だから $g(C)$ もコンパクト, よって

$$g(C) \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$$

となる $y_1, \ldots, y_n \in g(C)$ が存在する。そこで

$$V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$$

とおくと, V は開集合で $\overline{V}$ はコンパクト, かつ

$$g(C) \subset V,\ f(\overline{V}) \subset U$$

つまり

$$g \in W(C, V),\ f \in W(\overline{V}, U)$$

である。また

$$\mu(W(\overline{V}, U) \times W(C, V)) \subset W(C, U)$$

は明らかだから,

$$W' = W(\overline{V}, U) \times W(C, V)$$

とおくと, W' は

$$(f, g) \in W' \subset \mu^{-1}(W(C, U))$$

をみたす (f, g) の開近傍である。これで μ が (f, g) で連続であることが示された。 $\square$

次に逆写像を対応させる写像

$$\nu : \mathrm{Homeo}(X) \longrightarrow \mathrm{Homeo}(X)$$

の連続性であるが, これには局所コンパクト Hausdorff よりさらに強い条件がいる。

定義 2.3.13. 位相空間 X, Y に対し

$$\mathcal{B}^S = \{W(K,U) \mid K \subset X \text{ が閉}, U \subset Y \text{ が開で } K \text{ あるいは } Y - U \text{ がコンパクト}\}$$

とおき, $\mathcal{B}^S$ を開集合の準基底とする $\mathrm{Map}(X,Y)$ の位相を対称コンパクト開位相 (symmetrized compact-open topology) という。

注意 2.3.14. 対称コンパクト開位相は, 普通のコンパクト開位相に開集合を追加して, 条件が対称になるようにした位相である。あまり使われているのを見ないが, 例えば, Atiyah と Segal の twisted K理論に関する論文 [AS04] で使われている。

命題 2.3.15. *任意の X に対し $\mathrm{Homeo}(X)$ に対称コンパクト開位相が入っているとき, または X がコンパクト Hausdorff で $\mathrm{Homeo}(X)$ に普通のコンパクト開位相 が入っているとき,*

$$\nu : \mathrm{Homeo}(X) \longrightarrow \mathrm{Homeo}(X)$$

は連続である。

証明. 対称コンパクト開位相の場合を考える。X がコンパクト Hausdorff の場合は演習問題とする。

$\mathrm{Homeo}(X)$ の開基 $W(K,U)$ について $\nu^{-1}(W(K,U))$ が開であることを示せばよい。

$$\begin{aligned} f \in \nu^{-1}(W(K,U)) &\iff f^{-1}(K) \subset U \\ &\iff K \subset f(U) \\ &\iff X - K \supset f(X - U) \\ &\iff f^{-1}(X - K) \supset X - U \end{aligned}$$

つまり $\nu^{-1}(W(K,U)) = W(X - U, X - K)$ であり, ν は連続である。 □

演習問題 2.3.16. X がコンパクト Hausdorff で $\mathrm{Homeo}(X)$ にコンパクト開位相が入っているとき, ν が連続であることを証明せよ。

上の証明からわかるように

系 2.3.17. *上の命題と同じ仮定の下で,*

$$\nu : \mathrm{Homeo}(X) \longrightarrow \mathrm{Homeo}(X)$$

は同相写像である。

そして目標だったことが証明できた。

系 2.3.18. *X が局所コンパクト Hausdorff で $\mathrm{Homeo}(X)$ に対称コンパクト開位相が入っているか, または X がコンパクト Hausdorff で $\mathrm{Homeo}(X)$ にコンパクト開位相が入っているとき, $\mathrm{Homeo}(X)$ は位相群になる。*

Homeo(X) が位相群になるための二つの条件が得られたわけであるが, 残念ながらいづれもあまり満足のいくものではない。例えば, $X = \mathbb{R}^n$ はコンパクトではないので, 対称コンパクト開位相を用いないといけないが, 対称コンパクト開位相はあまり一般的な位相ではない。 幸い, Homeo(X) のような巨大な群そのものを扱うことは少なく, その「小さな」部分群なら, コンパクト開位相で位相群になっていることが多いのである。

例 2.3.19. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ は Homeo$(\mathbb{R}^n)$ の部分群であるが, 演習問題 2.3.35 で確かめるように, コンパクト開位相の相対位相で定まる位相と例 2.2.8 の位相は一致するのである。 よって, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ はコンパクト開位相により位相群となる。 □

更に, 次節のテーマである群の作用のように, 逆写像を対応させる写像 $\nu : \mathrm{Homeo}(X) \to \mathrm{Homeo}(X)$ を考える必要のないときには, コンパクト開位相で十分である。 位相群の定義から逆元の存在を除いたものには次のような名前がついている。

定義 2.3.20. 位相モノイド (*topological monoid*) とは,

- 位相空間 X
- 特別な元 $e \in X$
- 連続写像

$$\mu : X \times X \longrightarrow X$$

からなり, 次の二つの条件をみたすものである。

$$\begin{aligned} \mu \circ (\mu \times 1_X) &= \mu \circ (1_X \times \mu) \\ \mu \circ (1_X \times c_e) &= \mu \circ (c_e \times 1_X) = 1_X \end{aligned}$$

例 2.3.21. 局所コンパクト Hausdorff 空間 X に対し, $\mathrm{Map}(X, X)$ はコンパクト開位相と写像の合成で位相モノイドになる。よって, このとき Homeo(X) もコンパクト開位相で位相モノイドになる。 □

例 2.3.19 の解釈としては, Homeo$(\mathbb{R}^n)$ をコンパクト開位相により位相モノイドとみなし, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ はその部分モノイドとみなすのがよい。 この場合, たまたま $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ は群にもなっていたのである。 実は, 「たまたま」ではなく, このような場合がほとんどである。 よって, 以後 Homeo(X) を考えるときには, コンパクト開位相により位相モノイドとみなすことにする。

補足: コンパクト開位相の意味

前節で導入したコンパクト開位相は複雑で取っつきにくく, できれば避けて通りたいようなものであるが, 残念ながら(?) 我々の必要な性質をうまくみたしているものなので使わないわけにはいかない。

そこで本節では，コンパクト開位相に少しでも馴れ親しんでもらうため，コンパクト開位相がどういうものなのか少し解説してみたい。

まずは微分積分学で学んだことを思い出そう。

定理 2.3.22. 連続写像
$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
は最大値, 最小値を持つ。

この事実は，$[a, b]$ がコンパクトであること，よって $f([a, b])$ がコンパクトであること，そして $\mathbb{R}$ のコンパクト集合は有界閉集合であること，から証明される。全く同様に，より一般に次のことが証明できる。

定理 2.3.23. X がコンパクトなら, 任意の連続写像
$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$
は最大値, 最小値を持つ。

系 2.3.24. X がコンパクトのとき,
$$f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$$
が連続なら $|f(x) - g(x)|$ は最大値を持つ。

このことから次を得る。

定理 2.3.25. X がコンパクトのとき, $f, g \in \mathrm{Map}(X, \mathbb{R})$ に対し
$$d(f, g) = \max_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$
とおくと, $\mathrm{Map}(X, \mathbb{R})$ は d により距離空間になる。

注意 2.3.26. 上の距離は
$$\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)|$$
により定義されたノルム (norm) による距離である。このノルムを *sup norm* という。

これで X がコンパクトで $Y = \mathbb{R}$ のとき $\mathrm{Map}(X, Y)$ は距離空間, よって位相空間となることがわかった。この定義はコンパクト開位相の定義より取っつきやすいと思う。ただし扱いやすいかどうかは別であるが。またこの定義では $\mathbb{R}$ が距離空間であるという事実しか使っていないので, 次のように一般化できる。

定理 2.3.27. X がコンパクトで (Y, δ) が距離空間のとき, $f, g \in \mathrm{Map}(X, Y)$ に対し
$$d(f, g) = \max_{x \in X} \delta(f(x), g(x))$$
とおくと, $\mathrm{Map}(X, Y)$ は d により距離空間になる。

注意 2.3.28. この距離により $\mathrm{Map}(X,\mathbb{C})$ を距離空間と考えたものを $C(X)$ と書く。これは C^*環 (C^*-algebra) という構造を持ち, 関数解析学などで重要である。

この距離空間としての $\mathrm{Map}(X,Y)$ の位相は, 解析学では一様収束位相と呼ばれているものである。一般の位相空間 X に対しては次のように定義する。

定義 2.3.29. 位相空間 X と距離空間 (Y,δ) に対し $\mathrm{Map}(X,Y)$ に次のように位相を定義する: 写像列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Map}(X,Y)$ が f に一様収束するとは, 任意の $\varepsilon>0$ に対し十分大きな N を取ると, 任意の $x\in X$ と $n>N$ に対し

$$\delta(f(x),f_n(x))<\varepsilon$$

となることである。

この収束性により $\mathrm{Map}(X,Y)$ に定義された位相を**一様収束位相**という。

注意 2.3.30. X がコンパクトのとき, $\mathrm{Map}(X,Y)$ に定理 2.3.27 の距離により入れた位相と一様収束位相は一致する。

X がコンパクトではない場合には $\max_{x\in X}\delta(f(x),g(x))$ が存在しないかもしれないので, 次の定義の方が実用的である。

定義 2.3.31. 位相空間 X と距離空間 (Y,δ) に対し $\mathrm{Map}(X,Y)$ に次のように位相を定義する: X の各コンパクト部分空間 K に対し $\mathrm{Map}(K,Y)$ は Y の距離により一様収束位相を持つとする。このとき, K への制限により与えられる写像

$$i_K^*:\mathrm{Map}(X,Y)\longrightarrow \mathrm{Map}(K,Y)$$

がすべてのコンパクト部分集合 K に対し連続になるような最弱の (最も開集合の少ない) 位相を $\mathrm{Map}(X,Y)$ の**コンパクト一様収束位相**という。

$\varepsilon>0$ と $f\in\mathrm{Map}(K,Y)$ に対し

$$U_\varepsilon^K(f)=\{g\in\mathrm{Map}(K,Y)\mid \delta(f(x),g(x))<\varepsilon \text{ for any } x\in K\}$$

と定義するとき, コンパクト一様収束位相は

$$\left\{(i_K^*)^{-1}(U_\varepsilon^K(f)) \;\middle|\; K\subset X:\ \text{コンパクト}, f\in\mathrm{Map}(K,Y),\varepsilon>0\right\}$$

を開集合の基底とする位相である。

X と Y が「普通の空間」のときは, この位相とコンパクト開位相は一致する。

定理 2.3.32. *X が局所コンパクト Hausdorff で Y が距離空間ならば $\mathrm{Map}(X,Y)$ 上のコンパクト開位相とコンパクト一様収束位相は一致する。*

証明. まず任意のコンパクト集合 $K \subset X$ と開集合 $V \subset Y$ に対し, $W(K,V)$ がコンパクト一様収束位相で開であることを示そう。

$f \in W(K,V)$ をとる。任意の $x \in K$ に対し $f(x) \in V$ で V は開であるから, $\varepsilon_x > 0$ で

$$U_{\varepsilon_x}(f(x)) \subset V$$

となるものが存在する。ここで $U_{\varepsilon_x}(f(x))$ は $f(x)$ の Y の中での ε 近傍である。

$$f(K) \subset \bigcup_{x \in K} U_{\frac{\varepsilon_x}{2}}(f(x))$$

で K がコンパクトだから, 有限個を選んで

$$f(K) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\frac{\varepsilon_{x_i}}{2}}(f(x_i)) \tag{2.3}$$

とできる。そこで

$$\varepsilon = \min_i \varepsilon_{x_i}$$

とおき,

$$U = (i_K^*)^{-1}(U^K_{\frac{\varepsilon}{2}}(i_K^*(f)))$$

と定義する。ここで $U^K_{\frac{\varepsilon}{2}}(i_K^*(f))$ は, $\mathrm{Map}(K,Y)$ の sup norm による $i_K^*(f)$ の $\frac{\varepsilon}{2}$近傍 である。すると

$$f \in U \subset W(K,V)$$

となる。実際 $g \in U$ と任意の $x \in K$ に対し

$$\delta(f(x), g(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

であるが, (2.3) より, 任意の $x \in K$ に対し

$$\delta(f(x), f(x_i)) < \frac{\varepsilon_{x_i}}{2}$$

となる i が存在する。すると

$$\begin{aligned}
\delta(g(x), f(x_i)) &< \delta(g(x), f(x)) + \delta(f(x), f(x_i)) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon_{x_i}}{2} \\
&< \frac{\varepsilon_{x_i}}{2} + \frac{\varepsilon_{x_i}}{2} \\
&= \varepsilon_{x_i}
\end{aligned}$$

となり

$$g(x) \in U_{\varepsilon_{x_i}}(f(x_i)) \subset V$$

よって

$$g(K) \subset V$$

を得る。ここでコンパクト一様収束位相の定義から, U はコンパクト一様収束位相で開である。任意の $f \in W(K, V)$ に対し, そのコンパクト一様収束位相による開近傍がとれたから, $W(K, V)$ はコンパクト一様収束位相で開である。

逆に, 任意のコンパクト一様収束位相での開集合 $U \subset \mathrm{Map}(X, Y)$ に対し U がコンパクト開位相で開であることを示そう。$f \in U$ に対し, コンパクト一様収束位相の定義から, ある X のコンパクト部分集合 K と $\varepsilon > 0$ で

$$(i_K^*)^{-1}\left(U_\varepsilon^K(i_K^*(f))\right) \subset U$$

となるものが存在する。

$$K \subset \bigcup_{x \in K} f^{-1}(U_{\frac{\varepsilon}{3}}(f(x)))$$

であるが X が局所コンパクトであることから, 各 $x \in K$ に対し x の X での開近傍 V_x で

$$V_x \subset f^{-1}(U_{\frac{\varepsilon}{3}}(f(x)))$$

かつ $\overline{V_x}$ がコンパクトであるものが存在する。

$$K \subset \bigcup_{x \in K} V_x$$

であるが, K がコンパクトであることから, 有限個を選んで

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$$

とできる。

ここで

$$\begin{aligned} U_i &= U_{\frac{\varepsilon}{3}}(f(x_i)) \\ K_i &= \overline{V_{x_i}} \cap K \end{aligned}$$

とおくと, 任意の $g \in \cap_{i=1}^n W(K_i, U_i)$ に対し

$$i_K^*(g) \in U_\varepsilon^K(i_K^*(f))$$

となる。実際,

$$K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$$

より任意の $x \in K$ に対し $x \in K_i$ となる i がある。このとき

$$\begin{aligned} \delta(f(x), g(x)) &\leq \delta(f(x), f(x_i)) + \delta(f(x_i), g(x)) \\ &< \frac{\varepsilon_K}{3} + \delta(f(x_i), g(x)) \end{aligned}$$

であるが,

$$V_{x_i} \subset f^{-1}(U_{\frac{\varepsilon}{3}}(f(x_i)))$$

より

$$\overline{V_{x_i}} \subset U_{\frac{2\varepsilon}{3}}(f(x_i))$$

となる。よって

$$\delta(f(x), g(x)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

である。

以上のことより

$$i_K^*(\cap_{i=1}^n W(K_i, U_i)) \subset U_\varepsilon^K(i_K^*(f))$$

となり, U がコンパクト開位相で開であることが示された。 □

ここでもう一つコンパクト開位相を使うことの正当性を示す事実を挙げておこう。

定理 2.3.33. 位相空間 X, Y に対し

$$\mathrm{ev} : \mathrm{Map}(X, Y) \times X \longrightarrow Y$$

を $\mathrm{ev}(f, x) = f(x)$ で与えられる写像 *(evaluation map)* とする。

X が局所コンパクトのとき, コンパクト開位相は ev を連続にする $\mathrm{Map}(X, Y)$ の位相の中で最弱（開集合の数が最も少ない）のものである。

この事実は重要であるが, これ以上本節を長くしないために, ここでは証明しない。興味ある読者は, 例えば Kelly の本 [Kel75] を見られたい。

最後に次の2つの問題を考えれば, コンパクト開位相を使うことに納得できるだろう。

演習問題 2.3.34. 集合 $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ に離散位相を入れ位相空間と考える。 写像

$$e : \mathrm{Map}([n], X) \longrightarrow X^n$$

を

$$e(f) = (f(1), f(2), \ldots, f(n))$$

で定義すると, これは同相写像であることを確かめよ。

演習問題 2.3.35. §2.2で $M_n(\mathbb{R})$ の位相を定義したのと同様に, 実 $m \times n$ 行列のなす集合 $M_{m,n}(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}^{mn}$ と同一視し, $\mathbb{R}^{mn}$ の距離により位相を定義する。

一方, $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ は線型写像

$$A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

を定める。よって

$$M_{m,n}(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Map}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

とみなし, $\mathrm{Map}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ のコンパクト開位相から定義される相対位相を入れることができる。

この二つの位相が一致することを確かめよ。

2.4 ファイバー束と群の作用

構造群を持ったファイバー束の定義では群 $\mathrm{Homeo}(F)$ が重要であり, §2.3ではこの群 $\mathrm{Homeo}(F)$ にどのような位相を入れればよいかを考えてきた。

ファイバー束の構造群の定義をより精密にするために, 本節では $\mathrm{Homeo}(F)$ を別の面から見てみることにする。この群は, 実は空間 F への群の作用を考えるときに中心的な役割を果たすのである。

まず群の作用の定義を思い出そう。

定義 2.4.1. G を位相群 X を位相空間とするとき, G の X への (左からの) 作用 (*action*) とは, 連続写像

$$\mu : G \times X \longrightarrow X$$

で次の条件を満たすものである。

1. 任意の $x \in X$ に対し, $\mu(e, x) = x$, つまり

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "c_e \times 1_X"] \arrow[dr, "="'] & G \times X \arrow[d, "\mu"] \\ & X \end{tikzcd}$$

   が可換になる。

2. 任意の $g, h \in G$ と $x \in X$ に対し,

$$\mu(g, \mu(h, x)) = \mu(gh, x)$$

   つまり

$$\begin{tikzcd} G \times G \times X \arrow[r, "1_G \times \mu"] \arrow[d, "\mu_G \times 1_X"'] & G \times X \arrow[d, "\mu"] \\ G \times X \arrow[r, "\mu"] & X \end{tikzcd}$$

   が可換になる。ここで $\mu_G : G \times G \to G$ は G の積である。

簡単のため $\mu(g, x) = g \cdot x$ と書く。

まったく同様に右からの作用

$$X \times G \longrightarrow X$$

も定義される。

注意 2.4.2. 上の定義の図式をよく見ると, 群の定義 (定義 2.2.1) に現われた図式とよく似ていることがわかるだろう。実際, 次のことがわかる。

補題 2.4.3. *G を位相群とし, G の積*

$$\mu : G \times G \longrightarrow G$$

を考える。μ の定義域の左の G を群とみなし, 右の G を空間と考える。 また μ の値域の G も空間とみなす。すると μ は G の G 自身への左からの作用になっている。

証明. 群の定義 (単位元の存在と結合律) そのものである。 □

例 2.4.4. 例えば, G が $\mathbb{R}^n$ を加法で群とみなしたもののとき, 補題 2.4.3 の G の G への作用は, 平行移動である。 □

系 2.4.5. *G を位相群とし H をその部分群とする。このとき G の積 μ を制限した写像*

$$\mu|_{H\times G} : H \times G \longrightarrow G$$

は H の G への左からの作用である。

位相群の自分自身への作用の重要な例としては, 他にも次の共役 (*conjugation*) によるものがある。

演習問題 2.4.6. G を位相群としたとき

$$\mu^c : G \times G \longrightarrow G$$

を $(g, h) \in G \times G$ に対し

$$\mu^c(g, h) = ghg^{-1}$$

で定義する。これが G の G 自身への左からの作用になっていることを確かめよ。

具体的な群の作用の例で重要なのは次のものである。

演習問題 2.4.7. $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $X = \mathbb{R}^n$ とし G の X への作用を行列とベクトルの積

$$\mu(A, v) = Av$$

で定義する。これが $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の $\mathbb{R}^n$ への左からの作用になっていることを確かめよ。

また右からの作用で重要なのは次のものである。

演習問題 2.4.8. X を位相空間とし, Σ_n を n次対称群とする。このとき

$$\mu : X^n \times \Sigma_n \longrightarrow X^n$$

を $(x_1,\cdots,x_n)\in X^n$ と $\sigma\in\Sigma_n$ に対し

$$\mu((x_1,\cdots,x_n),\sigma)=(x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(n)})$$

で定義するとき, これが Σ_n の X^n への右からの作用になっていることを確かめよ。ただし Σ_n は離散位相により位相群とみなす。

注意 2.4.9. 以後, 本書では有限群はすべて離散位相により位相群とみなす。

右作用と左作用を入れ替えたいときには, 次のようにすればよい。

演習問題 2.4.10. 位相群 G が位相空間 X に左から作用

$$\mu_X : G\times X\longrightarrow X$$

しているとき,

$$\mu_X^{\mathrm{op}} : X\times G\longrightarrow X$$

を $\mu_X^{\mathrm{op}}(x,g)=(g^{-1},x)$ と定義すると, これは右作用になることを示せ。

演習問題 2.4.7の作用を制限することにより次の例が得られる。

例 2.4.11. $G=O(n), X=S^{n-1}$ とする。

$$\begin{array}{ccc} O(n) & \subset & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ S^{n-1} & \subset & \mathbb{R}^n \end{array}$$

だから, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の $\mathbb{R}^n$ への作用の制限により $O(n)$ の S^{n-1} への作用が定義されることを示したい。証明すべきことは,

$$A\in O(n),\ v\in S^{n-1}\Longrightarrow Av\in S^{n-1} \tag{2.4}$$

である。まず

$$v\in S^{n-1}\Longleftrightarrow |v|^2=1\Longleftrightarrow \langle v,v\rangle=1\Longleftrightarrow {}^t vv=1$$

ここで最後の等式では, v を縦ベクトル, つまり $n\times1$行列と思っている。 よって $Av\in S^{n-1}$ を示すのに

$${}^t(Av)(Av)=1$$

を示せばよい。しかし

$${}^t(Av)(Av)={}^t v{}^t AAv$$

であり $O(n)$ の定義から ${}^tAA=E_n$ である。 これで (2.4) が示された。 □

上の例や系 2.4.5 で使ったのは次の事実である。

補題 2.4.12. G を位相空間 X に左から作用する位相群とし, その作用を

$$\mu : G \times X \longrightarrow X$$

とする。

H を G の部分群, A を X の部分空間で

$$\mu(H \times A) \subset A$$

であるものとすると $\mu|_{H\times A}$ は H の A への作用である。

例 2.4.13. 上の例で $n = 2$ の場合, つまり $O(2)$ の S^1 への作用を少し詳しく見てみることにしよう。

S^1 はよく知っているので $O(2)$ を考える。まず重要なことは

$$A \in O(2) \Longrightarrow \det A = \pm 1$$

である。よって

$$\det : O(2) \longrightarrow \{\pm 1\}$$

は全射準同型である。準同型定理より同型

$$O(2)/\operatorname{Ker}\det \cong \{\pm 1\}$$

を得るが,

$$\operatorname{Ker}\det = \mathrm{SO}(2)$$

より, これは $T \in O(2) - \mathrm{SO}(2)$ により

$$O(2) = \mathrm{SO}(2) \cup T \cdot \mathrm{SO}(2)$$

と coset 分解できるということである。つまり $A \in O(2)$ ならば $A \in \mathrm{SO}(2)$ または $B \in \mathrm{SO}(2)$ により $A = TB$ と書けるということである。 ここで演習問題 2.2.32 より

$$\mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \middle| \ 0 \le \theta < 2\pi \right\}$$

である。また

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

としてよい。これは y軸に関する反転である。よって $O(2)$ の S^1 への作用は回転か y軸に関する反転か, またはそれらの合成で与えられる。 □

注意 2.4.14. 上の議論で, $\mathrm{SO}(2)$ が xy平面の原点を中心とした回転全体の成す群であることがわかったわけであるが, より一般に $\mathrm{SO}(n)$ を回転群という場合もある。実際, $\mathrm{SO}(n)$ は $\mathbb{R}^n$ の中の原点を通る直線に関する回転の合成からなる群である。

$O(2)$ には次のような元が含まれている。

演習問題 2.4.15. ℓ を $\mathbb{R}^2$ 内の原点を通る直線とし, T_ℓ を ℓ に関する鏡映 (reflection) とする。

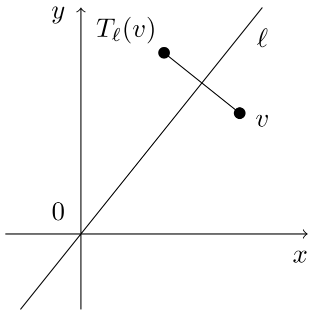


図 2.5: 直線に関する鏡映

このとき T_ℓ を行列で表し, $T_\ell \in O(2)$ であることを示せ。また, T_ℓ を T と $\mathrm{SO}(2)$ の元との積で表せ。

演習問題 2.4.16. $0 \leq \theta < 2\pi$ に対し

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

とおく。また自然数 $n \geq 3$ に対し

$$D_{2n} = R_{\frac{2\pi}{n}} \text{ と } T \text{ で生成された } O(2) \text{ の部分群}$$

とおく。この群 D_{2n} を二面体群 (dihedral group) という。

このとき $O(2)$ の $\mathbb{R}^2$ への作用を制限することにより, D_{2n} は原点を中心とし y軸に関して対称な正n角形に作用することを示せ。

また D_{2n} が位数 $2n$の有限群であることを示し, D_{2n} を生成元と関係式で表せ。

少し $O(2)$ に深入りしすぎたが, また一般の群の作用に戻ろう。群の作用は

$$\mu : G \times X \longrightarrow X$$

という写像だから, その adjoint

$$\mathrm{ad}(\mu) : G \longrightarrow \mathrm{Map}(X, X)$$

が取れる。この写像は次のような性質を持っている。

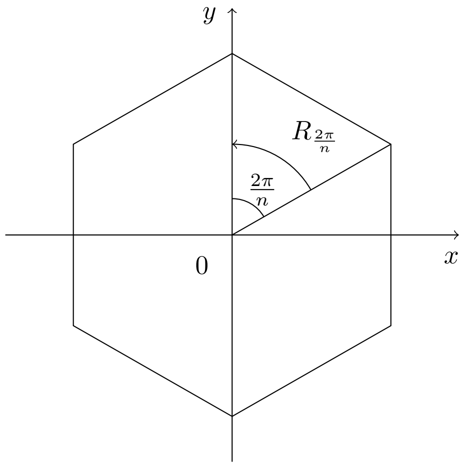


図 2.6: 二面体群

補題 2.4.17. G を位相群, X を位相空間とし,

$$\mu : G \times X \longrightarrow X$$

を G の X への作用とする。このとき μ の *adjoint*

$$\mathrm{ad}(\mu) : G \longrightarrow \mathrm{Map}(X, X)$$

の像は $\mathrm{Homeo}(X)$ に含まれる。よって $\mathrm{ad}(\mu)$ は

$$\mathrm{ad}(\mu) : G \longrightarrow \mathrm{Homeo}(X)$$

という写像であると考えられる。

証明. 簡単のため $g \in G, x \in X$ に対し

$$gx = \mu(g, x)$$

と書く。

任意の $g \in G$ に対し

$$\mathrm{ad}(\mu)(g) : X \longrightarrow X$$

が同相写像であることを示せばよいが, そのために $\mathrm{ad}(\mu)(g^{-1})$ がその逆写像であることを示す。

任意の $x \in X$ に対し

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(\mu)(g^{-1}) \circ \mathrm{ad}(\mu)(g)(x) &= \mathrm{ad}(\mu)(g^{-1})(\mu(g,x)) \\ &= \mathrm{ad}(\mu)(g^{-1})(gx) \\ &= \mu(g^{-1}, gx) \\ &= g^{-1}(gx) \\ &= (g^{-1}g)x \\ &= ex \\ &= x \end{aligned}$$

となり,

$$\mathrm{ad}(\mu)(g^{-1}) \circ \mathrm{ad}(\mu)(g) = 1_X$$

である。同様の計算で

$$\mathrm{ad}(\mu)(g) \circ \mathrm{ad}(\mu)(g^{-1}) = 1_X$$

であることもわかるので, $\mathrm{ad}(\mu)(g)$ は同相写像である。 □

補題 2.4.18. G を位相空間 X に作用する位相群とし,

$$\mu : G \times X \longrightarrow X$$

をその作用とすると

$$\mathrm{ad}(\mu) : G \longrightarrow \mathrm{Homeo}(X)$$

は連続な準同型である。

証明. $\mathrm{ad}(\mu)$ が連続であることは補題 2.3.6からわかる。 よって $\mathrm{ad}(\mu)$ が群の準同型であること, つまり任意の $g, h \in G$ に対し

$$\mathrm{ad}(\mu)(gh) = \mathrm{ad}(\mu)(g) \circ \mathrm{ad}(\mu)(h)$$

を示せばよい。ここで任意の $x \in X$ に対し

$$\mathrm{ad}(\mu)(gh)(x) = \mu(gh, x) = (gh)x$$

であり

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(\mu)(g) \circ \mathrm{ad}(\mu)(h)(x) &= \mathrm{ad}(\mu)(g)(\mu(h,x)) \\ &= \mathrm{ad}(\mu)(g)(hx) \\ &= \mu(g, hx) \\ &= g(hx) \\ &= (gh)x \end{aligned}$$

だから

$$\mathrm{ad}(\mu)(gh) = \mathrm{ad}(\mu)(g) \circ \mathrm{ad}(\mu)(h)$$

が示された。 □

以上のことで作用

$$G \times X \longrightarrow X$$

があれば, 連続な準同型

$$G \longrightarrow \mathrm{Homeo}(X)$$

ができたわけであるが, 逆にこのような連続な準同型から G の X への作用ができるだろうか。まず adjoint を取ることの逆の操作が必要であるが, それは次で定義される。

定義 2.4.19. 写像

$$\varphi : X \longrightarrow \mathrm{Map}(Y, Z)$$

に対し

$$\mathrm{ad}^{-1}(\varphi) : X \times Y \longrightarrow Z$$

を

$$\mathrm{ad}^{-1}(\varphi)(x, y) = \varphi(x)(y)$$

で定義する。

注意 2.4.20. ここで ad^{-1} という記号を使ったのは ad という写像の逆写像という意味である。補題 2.3.6 より, ad は

$$\mathrm{ad} : \mathrm{Map}(X \times Y, Z) \longrightarrow \mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(Y, Z))$$

という写像であると考えられる。上の定義の ad^{-1} はこの写像の逆写像である。

演習問題 2.4.21. $\mathrm{Map}(X \times Y, Z)$ と $\mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(Y, Z))$ にコンパクト開位相を入れたとき,

$$\mathrm{ad} : \mathrm{Map}(X \times Y, Z) \longrightarrow \mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(Y, Z))$$

が同相写像になるための条件を考えよ。

補題 2.4.22. *Y が局所コンパクト Hausdorff であるとき*

$$\varphi : X \longrightarrow \mathrm{Map}(Y, Z)$$

が連続なら

$$\mathrm{ad}^{-1}(\varphi) : X \times Y \longrightarrow Z$$

も連続である。

証明*.* $U \subset Z$ を開集合として

$$\left(\mathrm{ad}^{-1}(\varphi)\right)^{-1}(U) = \{(x, y) \in X \times Y | \varphi(x)(y) \in U\}$$

を考える。$(x_0, y_0) \in \left(\mathrm{ad}^{-1}(\varphi)\right)^{-1}(U)$ に対し, $\varphi(x_0) : Y \longrightarrow Z$ が連続だから, $\varphi(x_0)^{-1}(U)$ は開集合であり, よって $Y - \varphi(x_0)^{-1}(U)$ は y_0 を含まない Y の閉集合である。

ここで Y は局所コンパクト Hausdorff だから正則 (命題 2.3.12), よって y_0 の開近傍 V で

$$\overline{V} \cap (Y - \varphi(x_0)^{-1}(U)) = \emptyset$$

つまり

$$\varphi(x_0)(\overline{V}) \subset U$$

であるものが取れる。

また Y が局所コンパクトだから $\overline{V}$ はコンパクトであると仮定してよい。すると $\varphi^{-1}(W(\overline{V}, U)) \times V$ は (x_0, y_0) の開近傍であり

$$\varphi^{-1}(W(\overline{V}, U)) \times V \subset \left(\mathrm{ad}^{-1}(\varphi)\right)^{-1}(U)$$

故に $\mathrm{ad}^{-1}(\varphi)$ は連続である。 □

系 2.4.23. *G が位相群で X は局所コンパクト Hausdorff 空間とする。*

$$\varphi : G \longrightarrow \mathrm{Homeo}(X)$$

が連続な準同型なら

$$\mathrm{ad}^{-1}(\varphi) : G \times X \longrightarrow X$$

は G の X への作用である。

証明*.* X がコンパクトならコンパクト開位相と対称コンパクト開位相が一致することより, 上の補題から $\mathrm{ad}^{-1}(\varphi)$ は連続である。よって後は $\mathrm{ad}^{-1}(\varphi)$ が群の作用の条件をみたしていることを示せばよいが, それは簡単な計算からわかるので省略する。

X がコンパクトでない場合には ad^{-1} の連続性を確かめなければならないが, それは読者の演習問題とする。 □

系 2.4.24. *X が局所コンパクト Hausdorff なら, $\mathrm{Homeo}(X)$ は X に連続に作用する。*

証明*.* 恒等写像

$$1_{\mathrm{Homeo}(X)} : \mathrm{Homeo}(X) \longrightarrow \mathrm{Homeo}(X)$$

は連続な準同型だから, 上の系より $\mathrm{Homeo}(X)$ の X への作用を定める。 □

この命題により, これ以降 X が局所コンパクトのときには位相群 G の X への連続な作用と連続な準同型

$$G \longrightarrow \mathrm{Homeo}(X)$$

を同一視する事にする。

群の作用について必要なことが大体揃ったので, ここでファイバー束に戻ることにしよう。§2.1 で F をファイバーとするファイバー束の構造群 G は, 部分群としての包含写像

$$G \hookrightarrow \mathrm{Homeo}(F)$$

により定義されていた。部分群の包含写像は準同型だから, (F が局所コンパクトなら) これはまさに G の F への作用である。そこでは, この作用の連続性について何も規定していなかったが, この作用が連続であると仮定するのが自然である。 また包含写像だけでなく, 任意の連続な準同型

$$G \longrightarrow \mathrm{Homeo}(F)$$

も同様に扱える。よって次の定義を得る。

定義 2.4.25 (正確な構造群の定義). Gを局所コンパクト Hausdorff 空間 F に連続に作用する位相群とし

$$G \longrightarrow \mathrm{Homeo}(F)$$

をその作用によって定まる連続な準同型とする。

ファイバー束 (B, E, F) が G を**構造群** (*structure group*) とする（Steenrod の意味での）ファイバー束であるとは, $\{\Phi^{\alpha\beta}\}$ をその座標変換としたとき, 任意の α, β に対し,

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr] & & \mathrm{Homeo}(F) \\
& U_\alpha \cap U_\beta \arrow[ul, dotted, "{}^{\exists}\overline{\Phi}^{\alpha\beta}"] \arrow[ur, "\Phi^{\alpha\beta}"'] &
\end{tikzcd}$$

が可換になるような連続写像 $\overline{\Phi}^{\alpha\beta}$ が存在することである。

注意 2.4.26. これ以降, 構造群を持ったファイバー束といったときには, この定義の意味であるとする。またファイバー束のファイバーは, 常に局所コンパクト Hausdorff であると仮定する。

例 2.4.27. 例 1.2.11 の Hopf 束 $S^3 \xrightarrow{p} S^2$が, 上の意味で S^1 を構造群に持つファイバー束であることを確かめよう。 構造群を見つけるために, まず局所自明化写像を思い出す。

$$\begin{aligned}
U_+ &= S^2 - \{(1, 0)\} \\
U_- &= S^2 - \{(-1, 0)\}
\end{aligned}$$

として

$$\begin{aligned}\varphi_+ &: p^{-1}(U_+) \longrightarrow U_+ \times S^1 \\ \varphi_- &: p^{-1}(U_-) \longrightarrow U_- \times S^1 \\ \varphi_+^{-1} &: U_+ \times S^1 \longrightarrow p^{-1}(U_+)\end{aligned}$$

は次で与えられていた。

$$\begin{aligned}\varphi_+(z_1, z_2) &= \left(2|z_1|^2 - 1, 2z_1\overline{z}_2, \frac{z_2}{|z_2|}\right) \\ \varphi_-(z_1, z_2) &= \left(2|z_1|^2 - 1, 2z_1\overline{z}_2, \frac{z_1}{|z_1|}\right) \\ \varphi_+^{-1}(x, z, w) &= \left(\frac{zw}{2\sqrt{\frac{1-x}{2}}}, w\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right)\end{aligned}$$

よって

$$\varphi_- \circ \varphi_+^{-1} : (U_+ \cap U_-) \times S^1 \longrightarrow (U_+ \cap U_-) \times S^1$$

は

$$\begin{aligned}\varphi_- \circ \varphi_+^{-1}(x, z, w) &= \varphi_-\left(\frac{zw}{2\sqrt{\frac{1-x}{2}}}, w\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right) \\ &= \left(2\frac{|zw|^2}{4(\frac{1-x}{2})} - 1, 2\frac{zw}{2\sqrt{\frac{1-x}{2}}}\overline{w}\sqrt{\frac{1-x}{2}}, \frac{\frac{zw}{2\sqrt{\frac{1-x}{2}}}}{\left|\frac{zw}{2\sqrt{\frac{1-x}{2}}}\right|}\right) \\ &= \left(\frac{|z|^2}{1-x} - 1, z, \frac{z}{|z|}w\right) \\ &= \left(x, z, \frac{z}{|z|}w\right)\end{aligned}$$

で与えられている。つまり, 座標変換

$$\Phi^{+-} : U_+ \cap U_- \longrightarrow \mathrm{Homeo}(S^1)$$

は $\Phi^{+-}(x, z)(w) = \frac{z}{|z|}w$ で与えられる。ここで $\frac{z}{|z|} \in S^1$ である事に注意する。

$$\overline{\Phi}^{+-} : U_+ \cap U_- \longrightarrow S^1$$

を $\overline{\Phi}^{+-}(x, z) = \frac{z}{|z|}$ で定義すれば, 次の可換図式を得る。

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[rr, "\mathrm{ad}(\mu)"] & & \mathrm{Homeo}(S^1) \\ & U_+ \cap U_- \arrow[ul, "\overline{\Phi}^{+-}"] \arrow[ur, "\Phi^{+-}"'] & \end{tikzcd}$$

ここで $\mathrm{ad}(\mu) : S^1 \to \mathrm{Homeo}(S^1)$ は, S^1 の積による S^1 自身への作用から定まる準同型。よって Hopf 束の構造群は S^1 まで小さくできる。$(x, z) \in U_+ \cap U_-$ が動けば, $\frac{z}{|z|}$ は S^1 の点全てを動くので, 構造群はこれ以上小さくできない。 □

一般にファイバー束が H を構造群に持ち, H がある位相群 G の部分群ならば, G もそのファイバー束の構造群である。 重要なのは構造群がどれだけ「小さく」取れるかということである。

定義 2.4.28. $\xi = (B, E, F)$ を位相群 G を構造群とするファイバー束とする。 このファイバー束の座標変換

$$\Phi^{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$$

の像が G の部分群 H に含まれるとき, ξ の構造群は H まで**簡約** (*reduce*) できるという。

2.5 群の作用による商空間

これまで見てきたように, 位相群の作用は構造群を持ったファイバー束の定義に本質的に現れる。 ファイバー束と位相群の関係でもう一つ重要なのは, 位相群の作用による商空間である。

定義 2.5.1. 位相群 G が空間 X に左から作用しているとき, 集合 X/G を

$$X/G = \{Gx \mid x \in X\}$$

と定義する。ここで

$$Gx = \{gx \mid g \in G\} \subset X$$

であり, x の G の作用による**軌道** (*orbit*) という。

$$p : X \longrightarrow X/G$$

を

$$p(x) = Gx$$

で与えられる写像とし, これを**射影** (*projection*) という。

この集合 X/G に位相 $\mathcal{O}$ を

$$\mathcal{O} = \{U \subset X/G \mid p^{-1}(U) \text{ が } X \text{ で開}\}$$

で定義する。つまり

$$U \subset X/G \text{ が開} \Longleftrightarrow p^{-1}(U) \text{ が } X \text{ で開}$$

である。

この空間 X/G を X の G の作用による**商空間** (*quotient space*) という。

注意 2.5.2. 上の定義では, G が左から作用しているのに右から割っているのは不自然に思うかもしれない。 実際, 左作用による商空間を $G\backslash X$, 右作用による商空間を X/G と書いて区別する場合が多い。

本書ではどちらから作用しているかはあまり深く考えないので, いづれの場合も X/G で表すことにする。

注意 2.5.3. 系2.4.5 で見たように, H が G の部分群だったら G の積により H の G への作用が定義される。このとき G の H の作用による商空間は, (位相を忘れれば) G の部分群 H による商集合と一致している。

商空間は, 普通は同値関係と用いて定義する。

定義 2.5.4. 位相空間 X と X における同値関係 $\sim$ に対し, 集合 $X/_\sim$ を

$$X/_\sim = \{[x] \mid x \in X\}$$

で定義し, また

$$p : X \longrightarrow X/_\sim$$

を射影, つまり $p(x) = [x]$ で定義される写像とする。ただし, $x \in X$ に対し $[x]$ で x の同値類を表わす。

このとき $X/_\sim$ の位相 $\mathcal{O}$ を

$$\mathcal{O} = \{U \subset X/_\sim \mid p^{-1}(U) \text{ が } X \text{ で開}\}$$

で定義する。この位相を持った $X/_\sim$ を Xの同値関係 $\sim$ による商空間といい, 位相 $\mathcal{O}$ を商位相または等化位相 (*quotient topology*) という。

定義 2.5.5. 位相群 G が空間 X に作用しているとき, X に同値関係 $\sim_G$ を次のように定める。$x, x' \in X$ に対し

$$x \sim_G x' \Longleftrightarrow \text{ある } g \in G \text{ により } x' = gx$$

演習問題 2.5.6. $\sim_G$ が同値関係であることを示せ。

補題 2.5.7. 位相群 G が空間 X に作用しているとき

$$X/_{\sim_G} = X/G$$

である。

証明. $x \in X$ に対し x の代表する同値類を $[x]$ と書くと,

$$\begin{aligned} [x] &= \{x' \in X \mid x \sim_G x'\} \\ &= \{gx \mid g \in G\} \\ &= Gx \end{aligned}$$

よって

$$X/_{\sim_G} = \{[x] \mid x \in X\} = \{Gx \mid x \in X\} = X/G$$

である。 □

このように, X/G を X を $\sim_G$ という同値関係で割ったものと思うと,

$$X/G = X \text{ の中で } G \text{ の作用で互いに移り合う点を同一視してできた空間}$$

とみなせる。このように考えると, 商空間 X/G を調べるのが楽になる場合が多い。

例 2.5.8. $X = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とし $G = C_2 = \{e, g\}$ を位数 2の巡回群とする。ここで e が G の単位元である。G の X への作用を

$$\begin{aligned} e \cdot z &= z \\ g \cdot z &= -z \end{aligned}$$

により定義する。 このとき商空間 X/G が何か考えよう。

単位元でない元 g の作用によって $z \in S^1$ は, その原点について対称な点 $-z$ に移る。

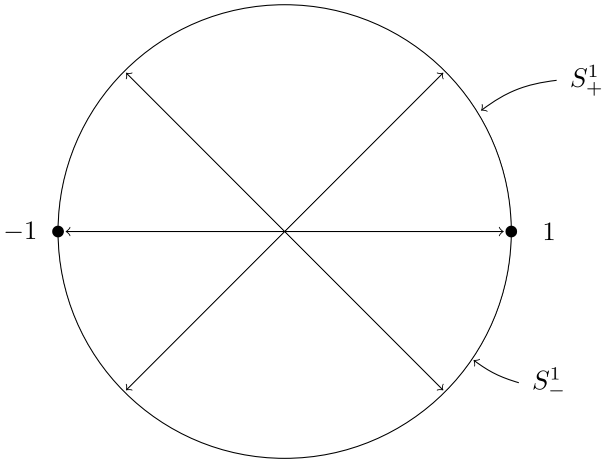


図 2.7: C_2 の S^1 への作用

よって図 2.7 のような S^1 の分割

$$S^1 = S^1_+ \cup S^1_- \cup \{1\} \cup \{-1\}$$

を考えると, g の作用により S^1_+ と S^1_-, 1 と -1 が互いに移りあう。よって G の作用で S^1_+ と S^1_- がまず同一視され半円周ができ, その両端 1 と -1 を同一視する事により円周ができる。すなわち

$$S^1/G \cong S^1$$

である。 □

これで S^1/G が S^1 になりそうなことはわかったのであるが, これはちゃんとした証明ではない。正確には次のようにする必要がある。

まず写像

$$f : S^1/G \longrightarrow S^1$$

を $f([z]) = z^2$ で定義する。これが同相写像であることを言いたいのであるが, そのためには次のことを確かめなければならない。

1. f が well-defined であること。
2. f が連続であること。
3. f が全単射であること。
4. f^{-1} が連続であること。

順番に確かめることにしよう。

$z, z' \in X$ が $z \sim_G z'$ であるとすると, $z = z'$ または $z = -z'$ である。よって f は well-defined である。

f が連続であることを確かめるために, U を S^1 の開集合とする。$f^{-1}(U)$ が S^1/G で開であることを示せばよいが, そのためには S^1/G の位相の定義より $p^{-1}(f^{-1}(U))$ が開であることを示せばよい。ここで

$$p^{-1}(f^{-1}(U)) = (f \circ p)^{-1}(U)$$

であり,

$$f \circ p : S^1 \longrightarrow S^1$$

は

$$(f \circ p)(z) = z^2$$

で与えられているから連続, よって $p^{-1}(f^{-1}(U))$ は開であり, f が連続であることが示された。

ここで用いた議論は, 商空間上の写像が連続であることを示すときの基本である。まとめると以下のようになる。

定義 2.5.9. 写像

$$f : X \longrightarrow Y$$

は, 次の条件をみたすとき**等化写像** (*quotient map*) と呼ばれる。

1. f は全射
2. $U \subset Y$ に対し,

$$U \text{ が開} \Longleftrightarrow f^{-1}(U) \text{ が開}$$

名前の通り等化位相と関係がある。

補題 2.5.10. $f : X \to Y$ が等化写像のとき, X に関係 $\sim_f$ を

$$x \sim_f x' \Longleftrightarrow f(x) = f(x')$$

で定義すると, これは同値関係であり, 同相 $Y \cong X/_{\sim_f}$ がある。

証明. ほとんど定義そのものなので省略する。 □

補題 2.5.11. 次の可換図式で π は等化写像とする。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

このとき g が連続であるための必要十分条件は f が連続であることである。

証明. 上の議論と全く同じなので省略する。 □

次に f が単射であることを示すために, $[z], [z'] \in S^1/G$ に対し $f([z]) = f([z'])$ であると仮定する。すると $z^2 = (z')^2$ となり $z = \pm z'$ よって $z \sim_G z'$ となる。故に, f は単射である。

f が全射であることを示すために, $w \in S^1$ を取る。 $0 \leq \theta < 2\pi$ により $w = e^{i\theta}$ と書けるから, $z = e^{\frac{i\theta}{2}}$ とおくと, $z \in S^1$ であり $f([z]) = w$ となる。これで f が全射であることが示された。

まとめると, これまでのことで f が連続な全単射であることが示された。 あとは f^{-1} が連続, つまり f が開写像または閉写像であることを示せばよいが, それには次の事実を用いる。

補題 2.5.12. X がコンパクトであり Y が *Hausdorff* のとき, 任意の連続写像

$$f : X \longrightarrow Y$$

は閉写像である。 よって f が連続な全単射であれば, f は同相写像である。

演習問題 2.5.13. これを示せ。

今の場合にこの補題を使うためには S^1/G がコンパクトであることを示せばよいが, それは次の補題で与えられる。

補題 2.5.14. X を位相空間とし $\sim$ を X 上の同値関係とする。このとき X がコンパクトなら $X/_\sim$ もコンパクトである。

演習問題 2.5.15. これを示せ。

以上のことで, 同相

$$S^1/G \cong S^1$$

が証明された。

この例は次のように一般化される。

演習問題 2.5.16. $X = S^1$, $G = C_p = \{e, g, g^2, \ldots, g^{p-1}\}$ (位数 p の巡回群) とし G の X への作用を

$$g^k x = e^{\frac{2\pi ik}{p}} x$$

で定義する。このとき $X/G \cong S^1$ を示せ。

これらは高次元への一般化もできる。

例 2.5.17. 位数 2の群 C_2 の $S^n = \left\{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1\right\}$ への作用を

$$g(x_0, \cdots, x_n) = (-x_0, \cdots, -x_n)$$

で定義する。この作用による商空間を $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ と書き, n次元実射影空間 (*real projective space*) と言う。 □

例 2.5.18. 例1.2.11 の時の S^3 のように

$$S^{2n+1} = \left\{(z_0, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \;\middle|\; |z_0|^2 + \cdots + |z_n|^2 = 1\right\}$$

として S^{2n+1} を複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^{n+1}$ の部分空間と思う。 この時, g を C_p の生成元として, C_p の S^{2n+1} への作用を $(z_0, \cdots, z_n) \in S^{2n+1}$ に対し

$$g(z_0, \cdots, z_n) = \left(e^{\frac{2\pi i}{p}} z_0, \cdots, e^{\frac{2\pi i}{p}} z_n\right)$$

で定義する。この作用による商空間を L_p^{2n+1} と書き, レンズ空間 (*lens space*) と言う。 □

例 2.5.19. S^1 の S^{2n+1} への作用を, $\omega \in S^1$, $(z_0, \cdots, z_n) \in S^{2n+1}$ に対し

$$\omega(z_0, \cdots, z_n) = (\omega z_0, \cdots, \omega z_n)$$

で定義する。この作用による商空間を $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ と書き n次元複素射影空間 (*complex projective space*) という。 □

演習問題 2.5.20. $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ は S^2 と同相であること, すなわち

$$S^3/S^1 \cong S^2$$

であることを示せ。(ヒント: Hopf bundle の射影 $p: S^3 \to S^2$ を使う。)

$\mathbb{R}\mathrm{P}^n$, $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ には別の表し方もある。実はこちらの方が元々の射影空間の定義である。

演習問題 2.5.21. $\mathbb{R}^\times$, $\mathbb{C}^\times$ の $\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}$, $\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}$ への作用

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\times \times (\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1}-\{0\} \\ \mathbb{C}^\times \times (\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}) & \longrightarrow & \mathbb{C}^{n+1}-\{0\} \end{array}$$

を同じ式

$$\omega \cdot (x_0, \cdots, x_n) = (\omega x_0, \cdots, \omega x_n)$$

で定義する。

このとき, 同相

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^{n+1}-\{0\})/\mathbb{R}^\times & \cong & \mathbb{R}\mathrm{P}^n \\ (\mathbb{C}^{n+1}-\{0\})/\mathbb{C}^\times & \cong & \mathbb{C}\mathrm{P}^n \end{array}$$

を示せ。

注意 2.5.22. 射影空間は, 商空間ではなく行列の成す空間の部分空間として表わすこともできる。例えば, 演習問題 2.2.37 より

$$\mathbb{R}\mathrm{P}^3 \cong \mathrm{SO}(3)$$

である。より一般の射影空間については, 横田の本 [横田一71] を参照されたい。

商空間が, 非常に簡単になるときもある。

例 2.5.23. 例 2.4.11 を思い出す。

$$\begin{array}{ccl} O(n) & = & \left\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = 1_n\right\} \\ S^{n-1} & = & \left\{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\right\} \end{array}$$

であり, $O(n)$ の S^{n-1} への作用

$$O(n) \times S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$$

は行列とベクトルの積で与えられていたのだった。

この作用による商空間は何だろう。

まずは簡単な場合, $n=2$の場合を考えることにしよう。$O(2)$ の S^1 への作用

$$O(2) \times S^1 \longrightarrow S^1$$

による商空間 $S^1/O(2)$ を考える。例 2.4.13 により $O(2)$ には

$$\begin{aligned}\mathrm{SO}(2) &= \{A \in O(2) \mid \det A = 1\} \\ &= \left\{ \left(\begin{array}{cc} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{array} \right) \middle| \ 0 \leq \theta < 2\pi \right\}\end{aligned}$$

が部分群として含まれていることがわかっている。

ここで演習問題 2.4.16 のように

$$R_\theta = \left(\begin{array}{cc} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{array} \right)$$

とおく。

すると任意の $v, w \in S^1$ に対し, v から w への角度を θ とすると

$$R_\theta v = w$$

となる。

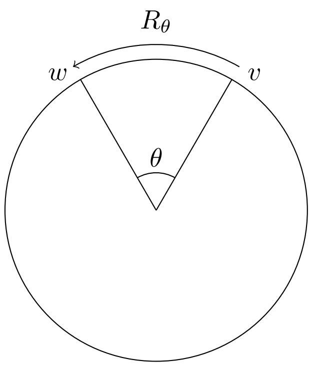


図 2.8: 角 θ の回転

つまり S^1 の中の任意の 2点は $O(2)$ の作用で互いに移り合う。これは S^1 の全ての点が同値であるということであり, 商空間は一点

$$S^1/O(2) = \{*\}$$

となる。

また上の議論をみれば $O(2)$ の作用を SO(2) に制限した作用で, すでに

$$S^1/\mathrm{SO}(2) = \{*\}$$

となることがわかる。

更に

$$S^{n-1}/SO(n) = \{*\}$$

も成り立っているが, 詳しくは, 例 2.5.38 で述べる。 □

この状況を一般化して次の定義を得る。

定義 2.5.24. 位相群 G が X に作用しているとき, 任意の $x, y \in X$ に対し

$$x = gy$$

となる $g \in G$ が存在するとき, この作用は**推移的** (*transitive*) であると言う。

つまり G の作用が推移的であるというのは, どの2点も G の作用で互いに移り合うということである。上の例と同様の議論で次を得る。

系 2.5.25. *G が X に推移的に作用するなら, X/G は一点のみから成る。*

作用が推移的である典型的な例は次のものである。

命題 2.5.26. *G を位相群 H をその部分群とするとき, G の G/H への作用*

$$\overline{\mu} : G \times G/H \longrightarrow G/H$$

を

$$\overline{\mu}(g, g'H) = gg'H$$

で定義する。もし $\overline{\mu}$ が連続ならば, これは推移的な作用である。

演習問題 2.5.27. これを示せ。

ここで「もし $\overline{\mu}$ が連続ならば」という条件が付いていることを不思議に思った読者もいるかもしれない。一般には μ は連続かどうか分らないのである。それを見るために, 次の図式を考える。

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "1_G \times p"'] & G \arrow[d, "p"] \\
G \times G/H \arrow[r, "\overline{\mu}"] & G/H
\end{tikzcd}$$

$p \circ \mu$ は連続だから, $1_G \times p$ が等化写像なら補題 2.5.11 より $\overline{\mu}$ も連続になる。p も 1_G も等化写像なのだから, $1_G \times p$ も等化写像になりそうなものであるが, 一般にはそれはウソである。

例 2.5.28. $\mathbb{Q}$ を $\mathbb{R}$ の部分空間として位相空間とみなす。$\mathbb{Q}$ の部分集合 $\mathbb{N}$ を一点と同一視する同値関係を $\sim_{\mathbb{N}}$ とし, 等化写像 $p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/_{\sim_{\mathbb{N}}}$ を考える。このとき, $1_{\mathbb{Q}} \times p : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times (\mathbb{Q}/_{\sim_{\mathbb{N}}})$ は等化写像ではない。詳しくは Munkres の本 [Mun00] の p. 143 Example 7 を参照のこと。 $\square$

もちろん, このような変なことが起きるのは特殊な場合であり, 少し条件をつけると $1_G \times p$ は等化写像になる。 その条件を考えるために, 小松と中岡と菅原の本 [小中菅67] から次の事実を引用しよう。

定理 2.5.29. $f : X \to Y$ を等化写像とする。$f^{-1}(f(V)) = V$ をみたす任意の開集合 $V \subset X$ と任意の $x \in V$ に対し, X の開集合 U で次の条件をみたすものが存在すると仮定する:

1. $x \in U$,
2. $U = f^{-1}(f(U))$,
3. $\overline{U}$ はコンパクトかつ $\overline{U} \subset V$

このとき, 任意の等化写像 $g : X' \to Y'$ に対し

$$f \times g : X \times X' \longrightarrow Y \times Y'$$

は等化写像である。

証明. 小松, 中岡, 菅原の [小中菅67] の p.2 定理 1.4 参照のこと。 □

これを用いると, 次の二つの有用な事実が証明できる。

演習問題 2.5.30. X をコンパクト, Y を Hausdorff とし, $f : X \to Y$ を連続な全射とする。このとき任意の等化写像 $g : Z \to W$ に対し

$$f \times g : X \times Z \longrightarrow Y \times W$$

は等化写像になることを示せ。

演習問題 2.5.31. X を局所コンパクト Hausdorff とする。このとき任意の等化写像 $f : Y \to Z$ に対し

$$1_X \times f : X \times Y \longrightarrow X \times Z$$

は等化写像であることを示せ。

これらの演習問題の結果を認めれば, G がコンパクトで G/H が Hausdorff, または G が局所コンパクト Hausdorff ならば G の G/H への作用は連続である。ここで, 例え G が Hausdorff でも G/H は Hausdorff になるとは限らないことに注意する。

演習問題 2.5.32. $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ は Hausdorff ではないことを示せ。

演習問題 2.5.33. G が位相群で H がその閉部分群なら G/H は Hausdorff であることを示せ。

逆に, たいていの空間 X と位相群 G に対し, 作用が推移的ならば X は G/H という形になっている。

定理 2.5.34. G をコンパクト位相群, X を *Hausdorff* 空間とし

$$\mu : G \times X \longrightarrow X$$

が推移的な作用であるとする。また, $x_0 \in X$ に対し $H = \{g \in G \mid gx_0 = x_0\}$ とおく。すると次が成り立つ。

1. H は G の閉部分群である。

2. $\overline{\varphi}(gH) = gx_0$ で定義される写像

$$\overline{\varphi} : G/H \longrightarrow X$$

は同相写像になる。

3. 図式

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, "\mu"] & X \\ G \times G/H \arrow[u, "1_G \times \overline{\varphi}"] \arrow[r, "\mu_{G/H}"] & G/H \arrow[u, "\overline{\varphi}"'] \end{tikzcd}$$

は可換になる。ここで $\mu_{G/H}$ は命題 *2.5.26* で与えられている作用である。

注意 2.5.35. つまり, G の X への作用が推移的である時, X はG の作用も込めて G/H と同一視できるということである。

定理 *2.5.34* の証明. 1. まず H が閉部分群であることを示す。

$$\varphi : G \longrightarrow X$$

を $\varphi(g) = gx_0$ で定義する。明らかに φ は連続である。 そして

$$H = \varphi^{-1}(\{x_0\})$$

仮定より X は Hausdorff だから一点は閉集合, よって H は G の閉集合となる。次に $h, h' \in H$ なら

$$(hh')x_0 = h(h'x_0) = hx_0 = x_0$$

であり, $hh' \in H$ となる。 また $h \in H$ に対し, $hx_0 = x_0$ より $h^{-1}(hx_0) = h^{-1}x_0$ であり, $x_0 = h^{-1}x_0$ となる。 よって $h^{-1} \in H$ であり, H は G の部分群である。

2. H の定義から $\overline{\varphi}$ が well-defined であることは容易にわかる。 次に $\overline{\varphi}$ が同相であることを示すために, まず $\overline{\varphi}$ が全単射であることを示す。

仮定より G の作用は推移的だから, 任意の $x \in X$ に対し $gx_0 = x$ となる $g \in G$ が存在する。この g に対して

$$\overline{\varphi}(gH) = gx_0 = x$$

よって $\overline{\varphi}$ は全射である。

単射であることを示すために

$$\overline{\varphi}(gH) = \overline{\varphi}(g'H)$$

と仮定する。すると

$$\begin{aligned} gx_0 &= g'x_0 \\ x_0 &= g^{-1}g'x_0 \end{aligned}$$

よって $g^{-1}g' \in H$ であり $gH = g'H$。ゆえに $\overline{\varphi}$ は単射である。

連続性は, $\varphi = \overline{\varphi} \circ p$ であること

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "p"] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ G/H \arrow[r, "\overline{\varphi}"] & X \end{tikzcd}$$

と φ が連続であること, そして p が等化写像であることから, 補題 2.5.11 を用いて示される。

あとは $\overline{\varphi}^{-1}$ が連続であることであるが, それは補題 2.5.12 と補題 2.5.14 により証明できる。

3. 最後に図式が可換になることであるが, これは面白くないので省略する。

□

定義 2.5.36. 上の定理に現れた部分群 $H = \{g \in G \mid gx_0 = x_0\}$ を G の x_0 での *isotropy subgroup* と言い, $\mathrm{Iso}_{x_0}(G)$ と書く。

もう一度例 2.4.11 に戻ろう。 この定理を使ってみたいのであるが, そのために次の事実が必要である。

命題 2.5.37. *$O(n)$ は, コンパクトな位相群である。*

証明. 位相群であることは, §2.2 の演習問題 2.2.13 でわかっている (はずである)。$O(n) \subset M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ であるので, コンパクトであることを示すには, $O(n)$ が $\mathbb{R}^{n^2}$ の有界閉集合であることを示せばよい。 $A \in O(n)$ に対し $A = (a_{ij})$ と書いたとき ${}^tA = (b_{ij})$ とおく。 $A{}^tA = E_n$ より

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

$b_{ij} = a_{ji}$ より

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{kj} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

特に各 i について

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 1$$

よって

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 = n$$

となる。つまり $O(n)$ は, $\mathbb{R}^{n^2}$ の中の原点を中心とする半径 $\sqrt{n}$ の球面に含まれるので有界である。

　また $f(A) = A^tA$ で定まる写像

$$f : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$$

は連続であり $O(n) = f^{-1}(\{E_n\})$ である。$M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ は Hausdorff なので一点 $\{E_n\}$ は閉集合, ゆえに $O(n)$ も閉集合である。 $\square$

例 2.5.38. 例 2.4.11 では $O(n)$ の S^{n-1} への作用は行列とベクトルの積で定義されていた。

$$\begin{array}{rccc} \mu : & O(n) \times S^{n-1} & \longrightarrow & S^{n-1} \\ & (A, v) & \longmapsto & \mu(A, v) = Av \end{array}$$

S^{n-1} は Hausdorff 空間 $\mathbb{R}^n$ の部分空間として Hausdorff であり, 上の命題より $O(n)$ はコンパクトである。 よって定理 2.5.34 を適用するためには, この作用が推移的であることを確かめればよい。

　$v \in S^{n-1}$ に対し v を含む $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n = v\}$$

を取り, これを行ベクトルとする行列を作る。

$$A = \begin{pmatrix} {}^t a_1 \\ \vdots \\ {}^t a_n \end{pmatrix}$$

ここで $a_1, \cdots, a_n$ は縦ベクトルつまり $1 \times n$ 行列とみなしている。すると

$$
\begin{aligned}
A {}^tA &= \begin{pmatrix} {}^ta_1 \\ \vdots \\ {}^ta_n \end{pmatrix} (a_1, \cdots, a_n) \\
&= \begin{pmatrix} {}^ta_1 a_1 & {}^ta_1 a_2 & \cdots & {}^ta_1 a_n \\ {}^ta_2 a_1 & \ddots & & {}^ta_2 a_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ {}^ta_n a_1 & {}^ta_n a_2 & \cdots & {}^ta_n a_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となる。$\{a_1, \cdots, a_n\}$ は正規直交基底であり ${}^ta_i a_j$ は a_i と a_j の内積だから

$$
{}^ta_i a_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}
$$

よって

$$
A {}^tA = 1_n
$$

となり $A \in O(n)$ である。この行列 A を用いれば

$$
Av = \begin{pmatrix} {}^ta_1 v \\ \vdots \\ {}^ta_n v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^ta_1 a_n \\ \vdots \\ {}^ta_n a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

つまり

$$
e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

とおくと, 任意の点 $v \in S^{n-1}$ に対し $A \in O(n)$ が存在し $Av = e_n$ である。別の点 $u \in S^{n-1}$ に対しても $Bu = e_n$ となる $B \in O(n)$ を取れば,

$$
A^{-1}Bu = A^{-1}e_n = v
$$

となり $A^{-1}B \in O(n)$ である。故に $O(n)$ の S^{n-1} への作用は推移的である。

定理 2.5.34 により, $v \in S^{n-1}$ の isotropy subgroup

$$
\mathrm{Iso}_v(O(n)) = \{A \in O(n) \mid Av = v\}
$$

に対し, 同相

$$S^{n-1} \cong O(n)/\mathrm{Iso}_v(O(n))$$

を得る。$\mathrm{Iso}_v(O(n))$ を具体的に書き表すために特別な $v \in S^{n-1}$ を取ろう。これまでの計算から $v = e_n$ と取るのが良さそうである。このとき $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Iso}_{e_n}(O(n))$ とすると, $Ae_n = e_n$, つまり

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n-1n} \\ a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。よって

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n-1} & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & 1 \end{pmatrix}$$

である。 また $A^tA = E_n$ より

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n-1} & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n-11} & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{1n-1} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{nn-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるから, $a_{n1}^2 + \cdots + a_{nn-1}^2 + 1 = 1$ である。よって

$$a_{n1} = \cdots = a_{nn-1} = 0$$

であり，

$$A = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & A' & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と書ける。ここで $A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n-1} \end{pmatrix}$ とおいた。$A^tA = E_n$ より $A'^tA' = E_{n-1}$ は容易にわかる。つまり $A \in \mathrm{Iso}_{e_n}(O(n))$ ならば，$A' \in O(n-1)$ により

$$A = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & A' & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と表せることが分かった。逆に $A' \in O(n-1)$ ならば

$$\begin{pmatrix} & & & 0 \\ & A' & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Iso}_{e_n}(O(n))$$

は明らか。これは対応

$$A' \longmapsto \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & A' & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

により $O(n-1)$ を $O(n)$ の部分群と考えたとき位相群の同型 $\mathrm{Iso}_{e_n}(O(n)) \cong O(n-1)$ が得られることを示している。故に同相

$$S^{n-1} \cong O(n)/O(n-1)$$

を得る。 □

この例では，特別な元 $e_n \in S^{n-1}$ を選び，isotropy subgroup $\mathrm{Iso}_{e_n}(O(n))$ を考えた。特別な元について調べるだけでよいことは，次の事実で保証されている。

演習問題 2.5.39. 位相群 G が位相空間 X に推移的に作用しているとする。このとき，任意の $x, y \in X$ に対し，$\mathrm{Iso}_x(G)$ と $\mathrm{Iso}_y(G)$ は G の中で共役な部分群であることを示せ。

演習問題 2.5.40. ユニタリ群

$$U(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A{}^t\overline{A} = E_n\Big\}$$

と

$$S^{2n-1} = \Big\{(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n \Big| |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 = 1\Big\}$$

について同様のことを示せ。つまり行列の積で $U(n)$ を S^{2n-1} に作用させるとき

- $U(n)$ はコンパクト,
- $U(n)$ の S^{2n-1} への作用は推移的,
- $U(n)/U(n-1) \cong S^{2n-1}$

を示せ。

さて, 位相群 G とその閉部分群 H に対し, 射影

$$G \longrightarrow G/H$$

は H をファイバーとするファイバー束になっていることが多い。
例として

$$O(n) \longrightarrow O(n)/O(n-1) \cong S^{n-1}$$

を考える。ここで同相写像 $O(n)/O(n-1) \cong S^{n-1}$ の定義より, 上の合成

$$p : O(n) \longrightarrow S^{n-1}$$

は $p(A) = Ae_n$ で与えられていることに注意しておく。

命題 2.5.41. $e_n = {}^t(0, \cdots, 0, 1)$ とし $p(A) = Ae_n$ で定まる写像

$$p : O(n) \longrightarrow S^{n-1}$$

は $O(n-1)$ をファイバーとするファイバー束である。

証明. 局所自明化を見つけなければならない。アイデアは以下の通りである。

Step 1 S^{n-1}の開被覆 $\{U_\alpha\}$ と連続写像

$$s_\alpha : U_\alpha \longrightarrow p^{-1}(U_\alpha)$$

で $p \circ s_\alpha = 1_{U_\alpha}$ となるものを見つける。

Step 2 各 α に対し $\varphi_\alpha(A) = (p(A), s_\alpha(p(A))^{-1}A)$ により

$$\varphi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times O(n-1)$$

を定義する。

Step 3 φ_α が同相写像であることを示すために，写像

$$\psi_\alpha : U_\alpha \times O(n-1) \longrightarrow p^{-1}(U_\alpha)$$

を $\psi_\alpha(x, A) = s_\alpha(x)A$ で定義し，これが φ_α の逆写像になっている事を示す。

Step 1は後回し。

Step 2: まず

$$\varphi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times O(n-1)$$

を $\varphi_\alpha(A) = (p(A), s_\alpha(p(A))^{-1}A)$ で定義したとき，これが well-defined で連続であることを確かめなければならない。s_α の連続性より $U_\alpha \times O(n)$ への写像としての連続性は明らか。$s_\alpha(p(A))^{-1}A \in O(n-1)$，つまり $s_\alpha(p(A))^{-1}A \in \mathrm{Iso}_{e_n}(O(n))$ を示すため $s_\alpha(p(A))e_n$ と Ae_n を比べる。p の定義と $p \circ s_\alpha = 1_{U_\alpha}$ より

$$s_\alpha(p(A))e_n = p(s_\alpha(p(A))) = p(A) = Ae_n$$

ゆえに $s_\alpha(p(A))^{-1}Ae_n = e_n$ であり，

$$s_\alpha(p(A))^{-1}A \in O(n-1) = \mathrm{Iso}_{e_n}(O(n))$$

となる。

Step 3: ψ_α の連続性は明らか。

$$p(\psi_\alpha(x, A)) = s_\alpha(x)Ae_n = s_\alpha(x)e_n = p(s_\alpha(x)) = x$$

より $\psi_\alpha(x, A) \in p^{-1}(U_\alpha)$ であることがわかる。

$(x, A) \in U_\alpha \times O(n-1)$ に対し

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha \circ \psi_\alpha(x, A) &= \varphi_\alpha(s_\alpha(x)A) \\ &= (p(s_\alpha(x)A), s_\alpha(p(s_\alpha(x)A)^{-1}s_\alpha(x)A)) \end{aligned}$$

ここで $A \in O(n-1) = \mathrm{Iso}_{e_n}(O(n))$ より

$$\begin{aligned} p(s_\alpha(x)A) &= s_\alpha(x)Ae_n \\ &= s_\alpha(x)e_n \\ &= p(s_\alpha(x)) = x \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha \circ \psi_\alpha(x, A) &= (x, s_\alpha^{-1}s_\alpha(x)A) \\ &= (x, A) \end{aligned}$$

また $A \in p^{-1}(U_\alpha)$ に対し,

$$
\begin{aligned}
\psi_\alpha \circ \varphi_\alpha(A) &= \psi_\alpha(p(A), s_\alpha(p(A))^{-1}A) \\
&= s_\alpha(p(A))s_\alpha(p(A))^{-1}A \\
&= A
\end{aligned}
$$

ゆえに φ_α は同相写像である。

Step 1: S^{n-1} の開被覆として

$$
\begin{aligned}
U_+ &= S^{n-1} - \{e_n\} \\
U_- &= S^{n-1} - \{-e_n\}
\end{aligned}
$$

をとる。まず

$$
s_+ : U_+ \longrightarrow p^{-1}(U_+)
$$

を, $x = (x_1, \cdots, x_n) \in U_+$ に対し,

$$
s_+(x) = \begin{pmatrix}
1 - \frac{x_1 x_1}{1-x_n} & -\frac{x_1 x_2}{1-x_n} & \cdots & -\frac{x_1 x_{n-1}}{1-x_n} & x_1 \\
-\frac{x_2 x_1}{1-x_n} & 1 - \frac{x_2 x_2}{1-x_n} & & & x_2 \\
\vdots & & \ddots & & \vdots \\
-\frac{x_{n-1} x_1}{1-x_n} & & & 1 - \frac{x_{n-1} x_{n-1}}{1-x_n} & x_{n-1} \\
x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n
\end{pmatrix}
$$

と定義する。このとき, $s_+(x) \in O(n)$ であることは演習問題とする。

容易に計算でわかるように

$$
p \circ s_+(x) = s_+(x)e_n = x
$$

であり, よって s_+ は条件を満たす。s_- は s_+ から作る。まず

$$
C = \begin{pmatrix}
-1 & & & & \\
& 1 & & 0 & \\
& & \ddots & & \\
& 0 & & 1 & \\
& & & & -1
\end{pmatrix}
$$

と置いて, $x \in U_-$ に対し

$$
s_-(x) = C^{-1}s_+(Cx)
$$

と置けば良い。 □

演習問題 2.5.42. 上の証明の中で後回しにした $s_+(x) \in O(n)$ を示せ。 またどのようにして写像 s_+を見つけたかを考えよ。

上の命題の証明で, いきなり

$$s_\alpha : U_\alpha \longrightarrow p^{-1}(U_\alpha)$$

で $p \circ s_\alpha = 1_{U_\alpha}$ である写像が出てきたのを不思議に思うかもしれないが, これは次の群論 (?) からの事実をヒントにしている。

補題 2.5.43. G を群とし H をその部分群とする。

$$p : G \longrightarrow G/H$$

を射影としたとき, 写像

$$s : G/H \longrightarrow G$$

で $p \circ s = 1_{G/H}$ であるものに対し, $\varphi(g) = (p(g), s(p(g))^{-1}g)$ で定義される写像

$$\varphi : G \longrightarrow G/H \times H$$

は, 集合としての全単射である。

また G が位相群で s が連続なら, φ は同相写像である。

証明. 命題 2.5.41 の証明と同じ。 □

定義 2.5.44. 連続写像

$$p : E \longrightarrow B$$

に対し, 連続写像

$$s : B \longrightarrow E$$

で $p \circ s = 1_B$ であるものを p の **切断**, あるいは**断面** (*cross-section*) という。

上の補題は, $p : G \to G/H$ が切断を持てば, これは自明なファイバー束になると言っている。命題 2.5.41 でファイバー束になることを示すためには, 全体でなく, 局所的に自明になっていることを示せばよかったのだから, 「局所的な切断」, つまり $p \circ s_\pm = 1_{U_\pm}$ となる写像 $s_\pm : U_\pm \to p^{-1}(U_\pm)$ さえあればよかったのである。 これを一般化して次の定義を得る。

定義 2.5.45. $p : E \to B$ を連続写像とする。このとき p が**局所切断** (*local cross-section*) を 持つとは, 任意の $x \in B$ に対しその開近傍 U_x と連続写像

$$s_x : U_x \longrightarrow p^{-1}(U_x)$$

で $p \circ s_x = 1_{U_x}$ となるものが存在することである。

命題 2.5.41 の証明はそのまま次の定理に一般化できる。

定理 2.5.46. G を位相群, H をその部分群とする。もし射影 $p: G \to G/H$ が局所切断を持つなら, これはファイバーが H のファイバー束になる。

演習問題 2.5.47. $O(n) \to O(n)/O(n-1)$ の場合を一般化してこの定理を証明せよ。

注意 2.5.48. 命題 2.5.41 は横田の本 [横田一71] に依った。 関連した構成などが詳しく書いてあるので, 興味を持った読者には, この本を一読することをお勧めする。

注意 2.5.49. たいていの位相群 G とその閉部分群 H に対し射影 $G \to G/H$ は局所切断を持つ, よってファイバー束である。例えば G が Lie群なら良い。 証明については, 例えば, 戸田と三村の本 [戸三78] p.41 の定理5.17を見ると良い。

2.6 主束

G を位相群, H をその部分群とし, 射影 $p: G \to G/H$ が局所切断を持つと仮定する。このとき前節の結果より, $p: G \to G/H$ はファイバー束である。このファイバー束の構造群を調べてみよう。

ファイバー束

$$p: G \longrightarrow G/H$$

の座標変換は局所切断で与えられていた。 $U_\alpha, U_\beta \subset G/H$ を開集合で $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ であるものとし,

$$\begin{aligned} s_\alpha &: U_\alpha \longrightarrow p^{-1}(U_\alpha) \\ s_\beta &: U_\beta \longrightarrow p^{-1}(U_\beta) \end{aligned}$$

を局所切断とする。

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha &: p^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times H \\ \varphi_\beta &: p^{-1}(U_\beta) \longrightarrow U_\beta \times H \end{aligned}$$

を局所切断 s_α, s_β により定義される局所自明化とすると, $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, $h \in H$, $y \in p^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ に対し

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha^{-1}(x, h) &= s_\alpha(x)h \\ \varphi_\beta(y) &= (p(y), s_\beta(p(y))^{-1}y) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, h) &= \varphi_\beta(s_\alpha(x)h) \\ &= (p(s_\alpha(x)h), s_\beta(p(s_\alpha(x)h))^{-1}s_\alpha(x)h) \\ &= (x, s_\beta(x)^{-1}s_\alpha(x)h) \end{aligned}$$

つまり座標変換

$$\Phi^{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{Homeo}(H)$$

は

$$\Phi^{\alpha\beta}(x)(h) = s_\beta(x)^{-1} s_\alpha(x) h$$

で与えられる。

$$\mathrm{ad}(\mu_H) : H \longrightarrow \mathrm{Homeo}(H)$$

を H の積による自分自身への作用の adjoint とし,

$$\overline{\Phi}^{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow H$$

を $\overline{\Phi}^{\alpha\beta}(x) = s_\beta(x)^{-1} s_\alpha(x)$ で定義すると, 図式

$$\begin{tikzcd} H \arrow[rr, "\mathrm{ad}(\mu_H)"] & & \mathrm{Homeo}(H) \\ & U_\alpha \cap U_\beta \arrow[ul, "\overline{\Phi}^{\alpha\beta}"] \arrow[ur, "\Phi^{\alpha\beta}"'] & \end{tikzcd}$$

は可換になる。これは構造群が H でありそのファイバーへの作用が H の積で与えられていることを示している。

以上のことをまとめると次の定理を得る。

定理 2.6.1. G を位相群, H をその部分群とし, 射影 $p : G \to G/H$ が局所切断を持つとする。 このときファイバー束 $G \to G/H$ は構造群もファイバーも共に H であり構造群のファイバーへの作用は H の積

$$H \times H \longrightarrow H$$

で与えられている。

例によって, この状況を一般化する。

定義 2.6.2. G を位相群とする。ファイバー束 $p : E \to B$ でファイバーと構造群が共に G であり, 構造群のファイバーへの作用が G の積で与えられている時, これを主 G 束 (*principal G-bundle*) という。

この定義を用いて上の定理を言い替えると次のようになる。

系 2.6.3. G が位相群, H がその部分群で射影 $p : G \to G/H$ が局所切断を持てば, これは主 H 束になる。

系 2.6.4. 射影 $O(n) \to O(n)/O(n-1)$ と例 *2.5.38* で得られた同相写像 $O(n)/O(n-1) \cong S^{n-1}$ の合成により得られる写像 $O(n) \to S^{n-1}$ は主 $O(n-1)$ 束である。

この他にも，これまで見てきた例の中にすでに主束は幾つも現れている。例えば，例 2.4.27 でみたように。

例 2.6.5. Hopf 束

$$p : S^3 \longrightarrow S^2$$

は主 S^1 束である。 □

次に主束と一般のファイバー束の関係を見てみよう。

例 2.6.6. $G = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $H = C_2 = \{1, -1\} \subset G$ とすると，例 2.5.8 により $S^1/C_2 \cong S^1$, よって主C_2束

$$p : S^1 \longrightarrow S^1/C_2 \cong S^1$$

を得る。この写像 p は，円周 S^1 を真ん中でひねってから折り畳む写像である。

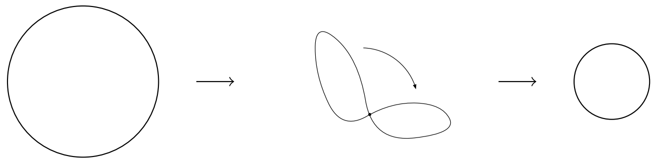


図 2.9: ひねって折り畳む

別の絵では，図 2.10 のようになる。この絵に線分を貼り付けると，図 2.11 のように

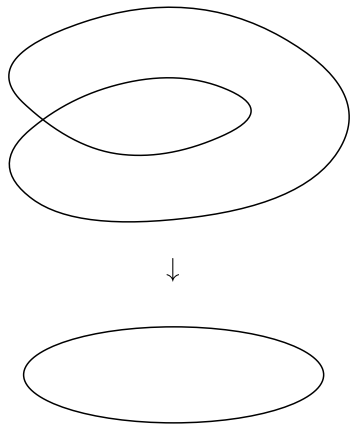


図 2.10: Möbiusの帯の境界

Möbiusの帯ができてしまう。

逆に，Möbiusの帯から中身を抜くと上の主 C_2 束ができる。ここで注意するのは，Möbiusの帯も構造群が C_2 であり底空間が S^1 である事である。 □

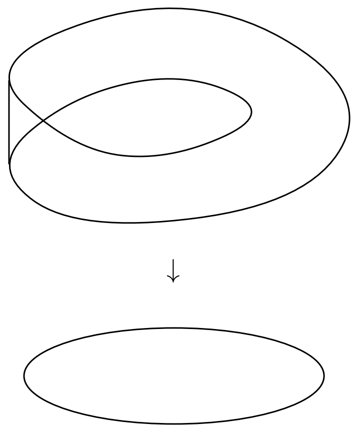


図 2.11: 図 2.10に線分を貼り付ける

そこでより一般に, 同じ底空間を持つ主 G 束と構造群が G のファイバー束の間に同様の対応があると考えられる。 それを調べるためファイバー束の定義に戻って考える。

$p : E \to B$ が構造群 G, ファイバー F のファイバー束なら, B の 開被覆 $\{U_\alpha\}$ と局所自明化

$$\varphi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\cong} U_\alpha \times F$$

があり, 座標変換は

$$\Phi^{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$$

の形である。言い替えれば, ファイバー束は自明なファイバー束 $U_\alpha \times F$ を座標変換の写像

$$\Phi^{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$$

により張り合わせたものと考えられる。まとめれば, 次のようになる。

構造群 G, ファイバー F のファイバー束 $p : E \to B$は, 以下のデータで決まる:

1. B の開被覆 $\{U_\alpha\}$
2. 写像 $\Phi^{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$
3. G の F への作用, つまり連続な準同型 $G \to \mathrm{Homeo}(F)$

一方, 主G束の場合, 構造群もファイバーも G で, 構造群 G のファイバーとしての G への作用は G の積で与えられている。 つまり, 上の一般のファイバー束の場合の最後のデータ $G \to \mathrm{Homeo}(G)$ は初めから決まっているのである。よって, 次のようにまとめられる。

主G束 $p: P \to B$は, 以下のデータで決まる。

1. B の開被覆 $\{U_\alpha\}$
2. 写像 $\Phi^{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \to G$

すると一般の構造群 G を持つファイバー束 $E \to B$ から最初の二つのデータを用いることにより, 主 G 束ができる。

逆 に$P \to B$ が主 G 束のときには, 一般のファイバー束の場合の三番目のデータ, つまり G の空間 F への作用を与えれば, F をファイバー, G を構造群とするファイバー束が作れる。

以上をまとめると, 次のようになる。

事実 2.6.7. G を位相群とし G の空間 F への作用を一つ固定する。もし, その作用を表わす写像 $G \to \mathrm{Homeo}(F)$ が単射[1]なら, 上の構成により次の一対一対応がある。

$$\{B \text{ 上の主 } G \text{ 束}\} \longleftrightarrow \{B \text{ 上のファイバーが } F \text{ で構造群が } G \text{ のファイバー束}\}$$

この対応は, 局所自明化を使っているので非常に煩雑である。 また数学的に厳密に定義されたわけではない。 正確には, 同型類の間の対応として述べなければならないが, ファイバー束の同型の定義は, 次章にならないと登場しないので, このような曖昧な述べ方になったのである。 しかし, 上の「$\longrightarrow$」にはもっと単純でちゃんとした構成法がある。 それをより詳しく調べることにしよう。

まず主 G 束の全空間を G が作用する空間として考える。

定義 2.6.8. $p: P \to B$ を主 G 束とする。G の右からの P への作用

$$P \times G \longrightarrow P$$

を, 局所自明化を用いて次のように定める: $\{\varphi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G\}_{\alpha \in A}$ を局所自明化とする。$x \in P, g \in G$ に対し $x \in p^{-1}(U_\alpha)$ の時, $\varphi_\alpha(x) = (p(x), \overline{\varphi}_\alpha(x))$ と書き,

$$x \cdot g = \varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(x)g) = \varphi_\alpha^{-1}(p(x), \overline{\varphi}_\alpha(x)g)$$

で g の x への作用を定義する。図式で描けば, 作用 $p^{-1}(U_\alpha) \times G \to p^{-1}(U_\alpha)$ は, 次の合成で与えられる。

$$p^{-1}(U_\alpha) \times G \xrightarrow{\varphi_\alpha \times id} (U_\alpha \times G) \times G = U_\alpha \times (G \times G) \xrightarrow{id \times \mu} U_\alpha \times G \xrightarrow{\varphi_\alpha^{-1}} p^{-1}(U_\alpha)$$

$P = \bigcup_{\alpha \in A} p^{-1}(U_\alpha)$ なので, これで

$$P \times G \longrightarrow P$$

が定まる。

[1]このような作用を, 忠実な (*faithful*) 作用という。

補題 2.6.9. 上の定義は *well-defined* である。つまり $x \in p^{-1}(U_\alpha) \cap p^{-1}(U_\beta)$ のとき, φ_α と φ_β を用いた二通りの $x \cdot g$ の定義があるが, それらは一致する。

証明. $x \in p^{-1}(U_\alpha) \cap p^{-1}(U_\beta), g \in G$ とする。

$$
\begin{aligned}
\varphi_\alpha \quad &: \quad p^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G \\
\varphi_\beta \quad &: \quad p^{-1}(U_\beta) \longrightarrow U_\beta \times G
\end{aligned}
$$

を局所自明化写像とし,

$$
\begin{aligned}
\varphi_\alpha(x) \quad &= \quad (p(x), \overline{\varphi}_\alpha(x)) \\
\varphi_\beta(x) \quad &= \quad (p(x), \overline{\varphi}_\beta(x))
\end{aligned}
$$

と書く。上の定義により, $p^{-1}(U_\alpha)$ 上では, $x \cdot g = \varphi_\alpha^{-1}(p(x), \overline{\varphi}_\alpha(x)g)$ であり, $p^{-1}(U_\beta)$ 上では, $x \cdot g = \varphi_\beta^{-1}(p(x), \overline{\varphi}_\beta(x)g)$ となる。よって

$$
\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}(p(x), \overline{\varphi}_\alpha(x)g) = (p(x), \overline{\varphi}_\beta(x)g)
$$

を示せば良い。ところが $\Phi^{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ を座標変換とするとき, 定義より $(y, h) \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times G$ に対し

$$
\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}(y, h) = (y, \Phi^{\alpha\beta}(y)h),
$$

すなわち

$$
\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}(p(x), \overline{\varphi}_\alpha(x)g) = (p(x), \Phi^{\alpha\beta}(p(x))\overline{\varphi}_\alpha(x)g)
$$

であり,

$$
\overline{\varphi}_\beta(x) = \Phi^{\alpha\beta}(p(x))\overline{\varphi}_\alpha(x)
$$

を示せば良い。しかし, これは

$$
\begin{aligned}
\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}(p(x), \overline{\varphi}_\alpha(x)) \quad &= \quad \varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1} \varphi_\alpha(x) = \varphi_\beta(x) = (p(x), \overline{\varphi}_\beta(x)) \\
\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}(p(x), \overline{\varphi}_\alpha(x)) \quad &= \quad (p(x), \Phi^{\alpha\beta}(p(x))\overline{\varphi}_\alpha(x))
\end{aligned}
$$

よりわかる。 □

　また上の定義が作用になっていることと, その作用が連続であることも確かめなければならないが, それはすぐわかるので読者の演習問題とする。 特に連続性については次の事実からわかる。

補題 2.6.10. 位相空間 X から Y への写像 $f : X \to Y$ を考える。 X の開被覆

$$
X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha
$$

で, f の各 U_α への制限 $f|_{U_\alpha}$ が連続であるものが存在するなら f は連続である。

演習問題 2.6.11. これを証明せよ。

注意 2.6.12. 上の G の作用は, 局所自明化写像

$$\varphi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G$$

が G の作用と可換になるように定義したものである。ただし G の $U_\alpha \times G$ への作用は

$$(x, h) \cdot g = (x, hg)$$

で与えられるものである。

P に G が作用しているのだから, その商空間 P/G が考えられる。ここで少し寄り道をして, P/G について考えてみよう。

定理 2.6.13. $p : P \to B$ を主 G 束とする。p は同相写像

$$\bar{p} : P/G \xrightarrow{\cong} B$$

を誘導する。また次の図式は可換となり, 射影 $\pi : P \to P/G$ はファイバー束の射影 $p : P \to B$ と同一視される。

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "="] \arrow[d, "\pi"] & P \arrow[d, "p"] \\ P/G \arrow[r, "\bar{p}"] & B \end{tikzcd} \tag{2.5}$$

証明. まず写像 $\bar{p} : P/G \to B$ を

$$\bar{p}([x]) = p(x)$$

で定義する, ここで $[x]$ は $x \in P$ の P/G における同値類である。これが定理の条件を満たす同相写像であることを示すためには, 次のことを確かめる必要がある。

1. $\bar{p}$ が well-defined
2. $\bar{p}$ が連続
3. $\bar{p}$ は全単射
4. $\bar{p}$ が開写像
5. $\bar{p}$ は図式 (2.5) を可換にする

$\bar{p}$ が well-defined であることを示すために, $[x] = [y]$ つまり $x = yg$ である $g \in G$ が存在すると仮定する。$p(y)$ の近傍 U_α での局所自明化を

$$\varphi_\alpha = p \times \overline{\varphi}_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G$$

とおくと, yg の定義より

$$yg = \varphi_\alpha^{-1}(p(y), \overline{\varphi}_\alpha(y)g)$$

また局所自明化写像の定義より

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_\alpha) \arrow[dr, "p"'] & & U_\alpha \times G \arrow[ll, "\varphi_\alpha^{-1}"'] \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ & U_\alpha & \end{tikzcd}$$

は可換である, ここで pr_1 は第一座標への射影である。よって

$$p(x) = p(yg) = p \circ \varphi_\alpha^{-1}(p(y), \overline{\varphi}_\alpha(y)g) = \mathrm{pr}_1(p(y), \overline{\varphi}_\alpha(y)g) = p(y)$$

であり $\bar{p}$ は well-defined である。

$\bar{p}$ が図式 (2.5) を可換にすることは明らか。 $\bar{p}$ の連続性は, その (2.5) の可換性と補題 2.5.11 より得られる。

次に $\bar{p}$ が全単射であることを示す。p が全射なので (2.5) の可換性より $\bar{p}$ が全射であることはすぐわかる。$x, y \in P$ を取り, $\bar{p}([x]) = \bar{p}([y])$ であると仮定する。つまり $p(x) = p(y)$ とする。$b = p(x) = p(y)$ と置き, b の近傍での局所自明化

$$\varphi_\alpha = p \times \overline{\varphi}_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G$$

を取る。 $g = \overline{\varphi}_\alpha(y)^{-1}\overline{\varphi}_\alpha(x)$ とおけば,

$$\varphi_\alpha(yg) = (p(yg), \overline{\varphi}_\alpha(yg)) = (p(y), \overline{\varphi}_\alpha(y)g) = (b, \overline{\varphi}_\alpha(x)) = \varphi_\alpha(x)$$

φ_α は同相なので, $x = yg$, よって $[x] = [y]$ となる。

最後に $\bar{p}$ が開写像であることであるが, それは次の一般的な事実から分る。 □

演習問題 2.6.14. 任意のファイバー束

$$p : E \longrightarrow B$$

に対し p は等化写像[2]であることを示せ。

例 2.6.15. Hopf 束

$$p : S^3 \longrightarrow S^2$$

は主 S^1 束であったから, 上の定理より S^1 が S^3 に作用していて, その商空間が S^2 になっているはずである。 これを確かめよう。

例 1.2.11 によると

$$\begin{aligned} U_+ &= S^2 - \{(1,0)\} \\ U_- &= S^2 - \{(-1,0)\} \end{aligned}$$

[2]実は, p は開写像になる。

として, 局所自明化

$$\begin{aligned}\varphi_+ &: p^{-1}(U_+) \longrightarrow U_+ \times S^1 \\ \varphi_- &: p^{-1}(U_-) \longrightarrow U_- \times S^1\end{aligned}$$

は次で与えられていた。

$$\begin{aligned}\varphi_+(z_1, z_2) &= \left(2|z_1|^2 - 1, 2z_1\overline{z}_2, \tfrac{z_2}{|z_2|}\right) \\ \varphi_-(z_1, z_2) &= \left(2|z_1|^2 - 1, 2z_1\overline{z}_2, \tfrac{z_1}{|z_1|}\right)\end{aligned}$$

定義 2.6.8 によると Hopf 束の構造群 S^1 の全空間 S^3 への作用は, 次で与えられる: $x \in p^{-1}(U_\pm), w \in S^1$ に対し

$$x \cdot w = \varphi_\pm^{-1}(p(x), \overline{\varphi}_\pm(x)w)$$

ただし $\overline{\varphi}_\pm$ は

$$\varphi_\pm(x) = (p(x), \overline{\varphi}_\pm(x))$$

で定義されていた。

ここで $x \cdot w$ を $x \in p^{-1}(U_+)$ の時に具体的に計算してみよう。 $x = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ と書くと

$$\overline{\varphi}_+(z_1, z_2) = \frac{z_2}{|z_2|}$$

であり

$$\varphi_+^{-1}(x, z, w) = \left(\frac{zw}{2\sqrt{\frac{1-x}{2}}}, w\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right)$$

である。よって $(z_1, z_2) \in p^{-1}(U_+), w \in S^1$ に対し

$$\begin{aligned}(z_1, z_2) \cdot w &= \varphi_+^{-1}(p(z_1, z_2), \overline{\varphi}_+(z_1)w) \\ &= \varphi_+^{-1}\left(2|z_1|^2 - 1, 2z_1\overline{z}_2, \tfrac{z_2}{|z_2|}w\right) \\ &= \left(\frac{2z_1\overline{z}_2\frac{z_2}{|z_2|}w}{2\sqrt{\frac{1-(2|z_1|^2-1)}{2}}}, \frac{z_2}{|z_2|}w\sqrt{\frac{1-(2|z_1|^2-1)}{2}}\right) \\ &= \left(\frac{z_1|z_2|w}{\sqrt{1-|z_1|^2}}, \frac{z_2}{|z_2|}w\sqrt{1-|z_1|^2}\right) \\ &= (z_1w, z_2w)\end{aligned}$$

つまり S^1 の $p^{-1}(U_+)$ への作用は, それぞれの座標への複素数の積で与えられている。同様にして, S^1 の $p^{-1}(U_-)$ への積も同じ式で与えられていることがわかる。

これはまさに例 2.5.19 の作用である。 よって複素射影空間の定義より

$$S^3/S^1 = \mathbb{C}\mathrm{P}^1$$

である。一方

$$S^3/S^1 \cong S^2$$

のはずだから

$$\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \cong S^2$$

という同相を得る。 □

上の定理により主 G 束 $p\colon P \to B$ のファイバー束の構造と G の P への作用とが深く関係していることがわかる。

本題に戻って, もう一度, 事実 2.6.7 の内容を思い出しておくと,

$$(\text{主 } G \text{ 束}) + (G \text{ の } F \text{ への作用}) = (\text{構造群が } G \text{ でファイバーが } F \text{ のファイバー束})$$

であった。つまり, 主 G 束 $P \to B$ と G の作用する空間 F が与えられたとき, G の P と F への作用から G を構造群, F をファイバーとするファイバー束が得られるはずであり, その簡潔な構成法を考えていたのだった。具体的には, 定義 2.6.8 で定義した作用を用い, 次のようにすればよい。

定義 2.6.16. G を位相群とし, G が位相空間 P と F にそれぞれ右と左から連続に作用しているとする。このとき G の $P \times F$ への左からの作用

$$\mu\colon G \times (P \times F) \longrightarrow P \times F$$

を $\mu(g,x,y) = (xg^{-1}, gy)$ で定義する。

この作用による商空間を $P \times_G F$ と書く。また $(x,y) \in P \times F$ の代表する $P \times_G F$ の元を $[x,y]$ と書く。

演習問題 2.6.17. これが群の作用になっていることを確かめよ。また $\mu(g,x,y) = (xg, gy)$ ではどうしてダメなのか考えよ。

定理 2.6.18. *$p\colon P \to B$ を主 G 束とし, 空間 F に G が左から作用しているとする。このとき*

$$\bar{p}\colon P \times_G F \longrightarrow B$$

を $\bar{p}([x,y]) = p(x)$ で定義すれば, これはファイバー F, 構造群 G のファイバー束になる。更に, 事実 2.6.7 の対応

$$\{B\text{上の主 } G \text{ 束}\} \longrightarrow \{B \text{ 上のファイバーが } F \text{ で構造群が } G \text{ のファイバー束}\}$$

は

$$(P \longrightarrow B) \longmapsto (P \times_G F \longrightarrow B)$$

で与えられる。

証明. 主 G 束 $p : P \to B$ の局所自明化写像を

$$\{\varphi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G\}$$

とする。これを元に $\bar{p} : P \times_G F \to B$ の局所自明化写像

$$\{\psi_\alpha : \bar{p}^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times F\}$$

を作りたい。まず

$$\begin{aligned}
\bar{p}^{-1}(U_\alpha) &= \{[x,y] \in P \times_G F \,|\, \bar{p}([x,y]) \in U_\alpha\} \\
&= \{[x,y] \in P \times_G F \,|\, p(x) \in U_\alpha\} \\
&= p^{-1}(U_\alpha) \times_G F
\end{aligned}$$

である。よって写像

$$\bar{p}^{-1}(U_\alpha) = p^{-1}(U_\alpha) \times_G F \overset{\varphi_\alpha \times_G id}{\longrightarrow} (U_\alpha \times G) \times_G F$$

を得る。

補題 2.6.19. $[(x,g),y]$ を (x,gy) に写す写像, つまり

$$1_{U_\alpha} \times \mu : (U_\alpha \times G) \times_G F \longrightarrow U_\alpha \times F$$

は同相写像である。ただし μ は G の F への作用である。

証明. $(x,y) \longmapsto [(x,e),y]$ が逆写像である。 □

そこで $\psi_\alpha : \bar{p}^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times F$ を次の合成で定義する。

$$\bar{p}^{-1}(U_\alpha) = p^{-1}(U_\alpha) \times_G F \overset{\varphi_\alpha \times_G id}{\longrightarrow} (U_\alpha \times G) \times_G F \overset{id \times \mu}{\longrightarrow} U_\alpha \times F$$

φ_α も $1_{U_\alpha} \times \mu$ も同相写像なので ψ_α も同相写像である。 ψ_α が次の図式を可換にすることもすぐ分かる。

$$\begin{tikzcd}
\bar{p}^{-1}(U_\alpha) \arrow[rr, "\psi_\alpha"] \arrow[dr, "\bar{p}"'] & & U_\alpha \times F \arrow[dl, "pr_1"] \\
& U_\alpha &
\end{tikzcd}$$

以上により $\bar{p} : P \times_G F \to B$ はファイバー束になる。

次に構造群を決定するため座標変換を考える。$(x,y) \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times F$ に対し,

$$
\begin{aligned}
\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(x,y) &= \psi_\beta \circ (\varphi_\alpha^{-1} \times_G id) \circ (id \times \mu)^{-1}(x,y) \\
&= \psi_\beta \circ (\varphi_\alpha^{-1} \times_G id)(x,e,y) \\
&= \psi_\beta(\varphi_\alpha^{-1}(x,e),y) \\
&= (id \times \mu) \circ (\varphi_\beta \times_G id)(\varphi_\alpha^{-1}(x,e),y) \\
&= (id \times \mu)(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x,e),y) \\
&= (id \times \mu)(x,\Phi^{\alpha\beta}(x)e,y) \\
&= (x,\Phi^{\alpha\beta}(x)y)
\end{aligned}
$$

ここで $\Phi^{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ は $p : P \to B$ の座標変換である。よって $\bar{p} : P \times_G F \to B$ の座標変換も同じ写像 $\Phi^{\alpha\beta}$ で与えられ, G を構造群に持つ。

これまでの議論により対応

$$
(P \longrightarrow B) \longmapsto (P \times_G F \longrightarrow B)
$$

は$P \to B$ の座標変換を使い F を張り付けて得られる。これは, 事実 2.6.7 の対応そのものである。 □

上の定理を Möbius の帯について確かめよう。

例 2.6.20. 例 2.6.6 の主 C_2 束

$$
p : S^1 \longrightarrow S^1/C_2 \cong S^1
$$

を考える。具体的には $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z|^2 = 1\}$ であり $p(z) = z^2$ で与えられている。$C_2 = \{1,-1\}$ の全空間 S^1 への作用は複素数としての積で与えられている。

一方 C_2 の $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ への作用は, 実数の積

$$
\begin{aligned}
1 \cdot t &= t \\
(-1) \cdot t &= -t
\end{aligned}
$$

で与えられている。上の定理によれば

$$
S^1 \times_{C_2} [\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}] = M \qquad (\text{Möbiusの帯})
$$

であるはずである。それを確かめよう。つまり, $S^1 \times [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ に C_2 の作用を

$$
(-1)(z,t) = (-z,-t)
$$

で定めたときその商空間が, Möbiusの帯であることを示したいのである。

例 1.2.1 の 4 のときのように, 円周を図 2.12 のように分ける。それに従って円筒

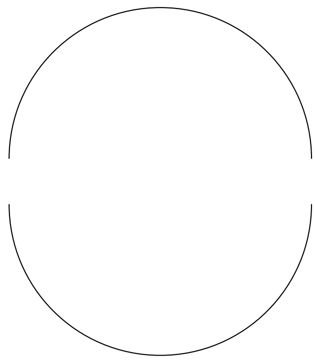


図 2.12: 円周の分割

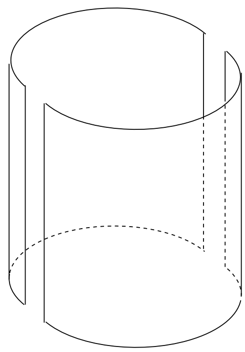


図 2.13: 円筒の分割

$S^1 \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ の分割を図 2.13 のように得る。 C_2 の作用により, 左半分と右半分が同一視され, 境界にある二つのファイバーも上下逆になりながら同一視される。 よってできた空間は Möbiusの帯である。

実際には $S^1 \times_{C_2} [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ と Möbiusの帯が同相になるだけでなく, ファイバー束として

$$S^1 \times_{C_2} [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}] \longrightarrow S^1$$

は Möbiusの帯

$$M \longrightarrow S^1$$

と「等しく」なるのであるが, それを示す前に, まず二つのファイバー束が「同じ」であることを定義しなければならない。 それは次章で行なう。 □

演習問題 2.6.21. 上で絵を描いて考えたことをもとに, $S^1 \times_{C_2} [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ から Möbiusの帯への同相写像を作れ。

本節を終わる前に, 主束の重要な性質を一つ述べておこう。

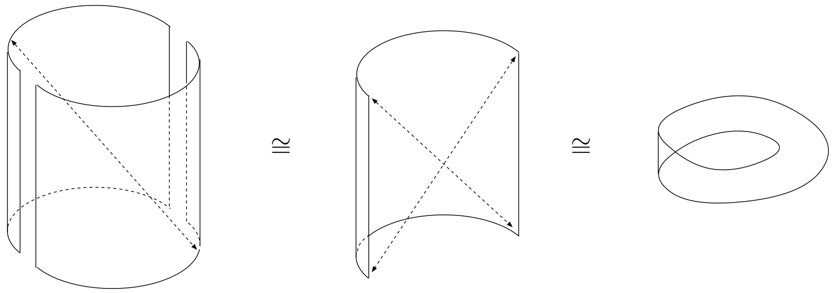


図 2.14: 同伴する Möbius の帯

系 2.6.3 より

$$G \longrightarrow G/H$$

は局所切断を持てば主 H 束になり, 全体で定義された断面を持てば, 自明なファイバー束になる。一般の場合も, もし全体で定義された断面があれば, そのファイバー束自体が自明になるのではないだろうか。実際, それは主束の基本的な性質の一つである。

定理 2.6.22. G を位相群とし, $p : P \to B$ を主 G 束とする。 もしこれが切断を持てば自明になる。

証明. 証明は定理 2.5.46 つまり命題 2.5.37 と同様である。断面

$$s : B \longrightarrow P$$

を用いて自明化

$$P \xrightarrow{\cong} B \times G$$

を作る。詳細は読者にまかせる。 □

注意 2.6.23. 上の定理で主束という仮定は本質的である。例えば, Möbius の帯は S^1 を中心線へ埋め込むという断面を持つが, 自明ではない。 これは Möbiusの帯が主束ではないからである。

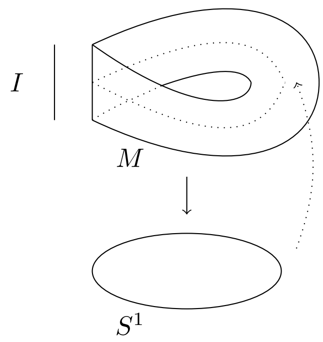


図 2.15: Möbius の帯の中心線への cross-section

3　ファイバー束の分類

この章では, ある空間を一つ決め, その上にどの様なファイバー束が存在するかを考えることにする。 §2.6で

$$\{B \text{ 上の主 } G\text{束}\} \longleftrightarrow \{B \text{ 上のファイバーが } F \text{ で構造群が } G \text{ のファイバー束}\}$$

の「一対一対応」があることが分かったので, 集合 $\{B$ 上の主 G束$\}$ を調べれば, 空間 B 上に, G を構造群として持つファイバー束にはどの様なものが存在するかが分かる。

空間 B を与えればこの集合が一つ決まるという意味で, これは B の「関数」のようなものであり, 実際この章の最終目標は, この集合を B を用いて記述することである。しかしそのためにはまず, ふたつのファイバー束が同じかどうかが分からないと話の進めようがない。

つまりファイバー束を比較する方法を確立しておかなければならないのである。 一般に現代数学では, ふたつの「モノ」の比較はその間の写像 (map あるいは morphism) によって行う。 そこでまずファイバー束の間の写像を定義することから始めよう。

3.1　ファイバー束の間の写像

ファイバー束は底空間, 全空間, ファイバー, 局所自明化, 座標変換そして構造群, という様々なデータから成る複雑なものである。 二つのファイバー束の間の「写像」は, これらのデータの間の対応を与えるもののはずである。 ではどのような対応を考えたらよいだろう。 まず第一に「写像」なのだから, 底空間, 全空間, ファイバーの三つの空間の間に連続写像がなければならないだろう。

そこで

$$\begin{aligned} \xi &= (F \longrightarrow E \xrightarrow{p} B) \\ \xi' &= (F' \longrightarrow E' \xrightarrow{p'} B') \end{aligned}$$

という二つのファイバー束があったとき, ξ から ξ' への写像として, まず底空間から底空間への写像

$$B \longrightarrow B',$$

全空間から全空間への写像

$$E \longrightarrow E',$$

そしてファイバーからファイバーへの写像

$$F \longrightarrow F'$$

を考える。しかし実際には底空間と全空間を考えるだけでよいのである。

定義 3.1.1. ファイバー束

$$\begin{aligned}\xi &= (p : E \longrightarrow B)\\ \xi' &= (p' : E' \longrightarrow B')\end{aligned}$$

に対し, ξ から ξ' へのファイバーを保つ写像 (*fiber-preserving map*) とは, 写像の組

$$\begin{aligned}\tilde{f} &: E \longrightarrow E'\\ f &: B \longrightarrow B'\end{aligned}$$

で, 図式

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, "f"] & B' \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

を可換にするものである。

このときまとめて

$$(\tilde{f}, f) : (E, B) \longrightarrow (E', B')$$

あるいは

$$\boldsymbol{f} = (\tilde{f}, f) : \xi \longrightarrow \xi'$$

と書くことにする。

演習問題 3.1.2. この定義は, ちゃんと名前通りの意味を持つことを確かめよ。つまり, 任意の点 $x \in B$ に対し $\tilde{f}$ は x 上のファイバー $p^{-1}(x)$ を $f(x)$ 上のファイバー $p'^{-1}(f(x))$ に写すことを示せ。

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(x) & \xrightarrow{\tilde{f}|_{p^{-1}(x)}} & p'^{-1}(f(x)) \\ \cap & & \cap \\ E & \xrightarrow{\tilde{f}} & E' \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{f} & B' \end{array}$$

これでとりあえずファイバー束を成す三つの空間の間の対応が定義できた。

注意 3.1.3. ファイバー束の間の写像としては, 座標変換や構造群について何も言っていないのでこれでは不十分であるが, 後に第II部 [FibII] でファイバー束の一般化として考えるファイバー空間 (第1 章) や準ファイバー空間 (第2章) の時にはこの定義を用いるので, ここで名前を付けておいた。

次に座標変換について考えよう。 ファイバー束

$$\begin{aligned} p &: E \longrightarrow B \\ p' &: E' \longrightarrow B' \end{aligned}$$

の局所自明化を, それぞれ $\{\varphi_\lambda : p^{-1}(U_\lambda) \to U_\lambda \times F\}$, $\{\psi_\mu : p'^{-1}(V_\mu) \to V_\mu \times F'\}$ とする。また

$$\begin{aligned} \Phi^{\lambda\lambda'} &: U_\lambda \cap U_{\lambda'} \longrightarrow \mathrm{Homeo}(F) \\ \Psi^{\mu\mu'} &: V_\mu \cap V_{\mu'} \longrightarrow \mathrm{Homeo}(F') \end{aligned}$$

をその局所自明化写像から決まる座標変換とする。

$$(\tilde{f}, f) : (E, B) \longrightarrow (E', B')$$

をファイバーを保つ写像としたとき, $(\tilde{f}, f)$ が座標変換と「うまくあう」ための条件としてどのようなものが必要だろうか。 まず f の制限により

$$f : U_\lambda \cap U_{\lambda'} \cap f^{-1}(V_\mu \cap V_{\mu'}) \longrightarrow V_\mu \cap V_{\mu'}$$

という写像ができることに注意しよう。そこで

$$\begin{tikzcd} U_\lambda \cap U_{\lambda'} \cap f^{-1}(V_\mu \cap V_{\mu'}) \arrow[r, "\Phi^{\lambda\lambda'}"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Homeo}(F) \arrow[d, dotted] \\ V_\mu \cap V_{\mu'} \arrow[r, "\Psi^{\mu\mu'}"] & \mathrm{Homeo}(F') \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

を可換にする写像

$$\mathrm{Homeo}(F) \longrightarrow \mathrm{Homeo}(F')$$

が存在するというのは自然な要求ではないだろうか。またその写像は, $\tilde{f}$ のファイバーへの制限

$$\tilde{f}|_F : F \longrightarrow F'$$

から作られるものであって欲しい。

そのために上の図式を少し詳しく考えてみよう。

元 $x \in U_\lambda \cap U_{\lambda'} \cap f^{-1}(V_\mu \cap V_{\mu'})$ を取り, 写像 $\Phi^{\lambda\lambda'}$ により図式 (3.2) を横に動くと

$$\Phi^{\lambda\lambda'}(x) : F \longrightarrow F$$

という写像ができる。また下に行ってから右に動くと

$$\Psi^{\mu\mu'}(f(x)) : F' \longrightarrow F'$$

という写像ができる。ここで $\tilde{f}$ の制限による写像が縦にあり, よって図式

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\Phi^{\lambda\lambda'}(x)"] \arrow[d, "\tilde{f}|_F"'] & F \arrow[d, "\tilde{f}|_F"] \\ F' \arrow[r, "\Psi^{\mu\mu'}(f(x))"] & F' \end{tikzcd}$$

ができる。この図式は誰がどう見ても可換になるのが自然ではないだろうか。 もしここで $\tilde{f}|_F$ が逆写像を持てば, この図式が可換になるというのは

$$\Psi^{\mu\mu'}(f(x)) = (\tilde{f}|_F) \circ \Phi^{\lambda\lambda'}(x) \circ (\tilde{f}|_F)^{-1}$$

ということである。ここで, より一般に次の事実がある。

補題 3.1.4. $f : X \to Y$ が同相写像のとき

$$c_f : \mathrm{Homeo}(X) \longrightarrow \mathrm{Homeo}(Y)$$

を

$$c_f(\varphi) = f \circ \varphi \circ f^{-1}$$

で定義する。すると c_f は群の同型である。

証明. 対応 $\varphi \mapsto f^{-1} \circ \varphi \circ f$ が逆写像になる。 □

この補題から

$$\tilde{f} : E \longrightarrow E'$$

のファイバーへの制限

$$\tilde{f}|_F : F \longrightarrow F'$$

が同相なら群の同型

$$c_{\tilde{f}|_F} : \mathrm{Homeo}(F) \longrightarrow \mathrm{Homeo}(F')$$

が得られることが分かった。その写像で図式 (3.2) が可換になっていることも上の議論ですぐ分かる。欲しいのは図式 (3.2) を可換にする写像で, 別に同型でなくてもよいのであるが, 今の場合自動的に同型になってしまったのである。

一般に同相な空間は同一視されるから, ファイバー束の間の写像で座標変換とうまくあっているものを考えるときには, ファイバーが同じ空間の場合のみを考える。

定義 3.1.5. $\xi = (p : E \to B)$ と $\xi' = (p' : E' \to B')$ を同じファイバー F を持つファイバー束とする。このとき ξ からξ' への**束写像** (*bundle map*)とは, ξ から ξ' へのファイバーを保つ写像

$$(\tilde{f}, f) : (E, B) \longrightarrow (E', B')$$

で, $\tilde{f}$ が各ファイバー上で同相写像であるもの, つまり, 任意の $x \in B$ に対し

$$\tilde{f}|_{p^{-1}(x)} : p^{-1}(x) \longrightarrow {p'}^{-1}(f(x))$$

が同相写像であるものである。

次に構造群を考えよう。上と同じ理由で, 構造群を持つファイバー束の間の写像を考えるときには, 同じ構造群を持つものしか考えない。

定義 3.1.6. $\xi = (p : E \to B)$ と $\xi' = (p' : E' \to B')$ を同じファイバー F と同じ構造群 G を持つファイバー束とし, G の F への作用も同じ写像

$$\mu : G \times F \longrightarrow F$$

で与えられているとする。

このとき ξ から ξ' への (構造群を保つ) 束写像とは, ξ から ξ' への定義 3.1.5 の意味での束写像であり, 更に次の条件をみたすものである: B の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ と B' の開被覆 $\{V_\mu\}_{\mu \in M}$ で, 各 U_λ と V_μ 上で, 局所自明化写像

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda &: p^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow U_\lambda \times F \\ \psi_\mu &: {p'}^{-1}(V_\mu) \longrightarrow V_\mu \times F \end{aligned}$$

を持つものをとる。このとき合成

$$(U_\lambda \cap f^{-1}(V_\mu)) \times F \xrightarrow{\varphi_\lambda^{-1}} p^{-1}(U_\lambda \cap f^{-1}(V_\mu)) \xrightarrow{\tilde{f}} {p'}^{-1}(f(U_\lambda) \cap V_\mu) \xrightarrow{\psi_\mu} (f(U_\lambda) \cap V_\mu) \times F \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} F$$

の adjoint は Homeo(F) に値を持ち連続写像

$$L^{\boldsymbol{f}}_{U_\lambda V_\mu} : U_\lambda \cap f^{-1}(V_\mu) \longrightarrow \mathrm{Homeo}(F)$$

を誘導するが, この写像が構造群Gに値を持つ, つまり次の図式を可換にする左斜め上向きの連続写像が存在する。

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\mathrm{ad}(\mu)"] & & \mathrm{Homeo}(F) \\ & U_\lambda \cap f^{-1}(V_\mu) \arrow[ul, dotted, "\exists \bar{L}^{\boldsymbol{f}}_{U_\lambda V_\mu}"] \arrow[ur, swap, "L^{\boldsymbol{f}}_{U_\lambda V_\mu}"] & \end{tikzcd}$$

演習問題 3.1.7. 上の条件で, 合成 $\mathrm{pr}_2 \circ \psi_\mu \circ \tilde{f} \circ \varphi_\lambda^{-1}$ の adjoint

$$\mathrm{ad}(\mathrm{pr}_2 \circ \psi_\mu \circ \tilde{f} \circ \varphi_\lambda^{-1}) : U_\lambda \cap f^{-1}(V_\mu) \longrightarrow \mathrm{Map}(F, F)$$

の像が $\mathrm{Homeo}(F)$ に含まれていることを確かめよ。

主束の間の束写像は構造群の作用に関し, 次の性質を持つ。

命題 3.1.8. *G を位相群とし, $\xi = (p : E \to B)$ と $\xi' = (p' : E' \to B')$ を主 G束とする。 このときファイバーを保つ写像*

$$\boldsymbol{f} = (\tilde{f}, f) : (E, B) \longrightarrow (E', B')$$

が束写像ならば, 次の図式は可換になる。

$$\begin{tikzcd} E \times G \arrow[r, "\tilde{f} \times 1_G"] \arrow[d] & E' \times G \arrow[d] \\ E \arrow[r, "\tilde{f}"] & E' \end{tikzcd} \tag{3.3}$$

ここで縦の写像は定義 2.6.8 による G の主 G束の全空間への作用である。

演習問題 3.1.9. これを示せ。

上の命題で現れた写像には, 一般に次のような名前がついている。

定義 3.1.10. G を位相群とし, X と Y に左から G が作用しているとする。 連続写像

$$f : X \longrightarrow Y$$

が G同変 (*G-equivariant*) であるとは, 次の図式が可換になることである。

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, "1_G \times f"] \arrow[d] & G \times Y \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

ここで縦の写像は G の作用である。右作用の場合も同様に定義する。

我々の目標は, 底空間を一つ決めその上のファイバー束を調べることなので, ファイバー束の同型として次の定義を用いる。

定義 3.1.11. $\xi = (p : E \to B)$ と $\xi' = (p' : E' \to B)$ を同じファイバー F と同じ底空間 B を持つファイバー束とする。もし束写像

$$\boldsymbol{f} = (\tilde{f}, f) : (E, B) \longrightarrow (E', B)$$

で $f = 1_B$ であるものが存在するなら，このとき ξ と ξ' は同型 (*isomorphic*) 或いは同値 (*equivalent*) であると言い，$\boldsymbol{f}$ を束同型写像 (*bundle isomorphism*) と言う。 このとき $\xi \cong \xi'$ と書く。

もちろん，ξ と ξ' が同じ構造群 G を持ち，G の F への作用も同じときには，$\boldsymbol{f}$ には定義 3.1.6 の意味で構造群についての条件を入れるものとする。

以下，構造群を持ったファイバー束のみ考える。構造群を指定しない場合は，$G = \mathrm{Homeo}(F)$ であると考えられるので一般性は失われない。

さて，上の定義でまず確かめなければならないのは次のことである。

命題 3.1.12. 上の関係 $\cong$ は同値関係である。つまり，

(反射律) 任意のξに対し，$\xi \cong \xi$

(対称律) $\xi \cong \eta \Rightarrow \eta \cong \xi$

(推移律) $\xi \cong \zeta$, $\zeta \cong \eta \Rightarrow \xi \cong \eta$

を満たす。

証明. 反射律と推移律は容易に証明できる。

$\xi = (p : E \to B)$ の時，恒等写像

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "="] \arrow[d, "p"] & E \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "="] & B \end{tikzcd}$$

は ξ とそれ自身の同型を与える。

$\xi = (p : E \to B)$, $\zeta = (p' : E' \to B)$, $\eta = (p'' = E'' \to B)$ に対し，

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"] & E' \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, "="] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E' \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "p'"] & E'' \arrow[d, "p''"] \\ B \arrow[r, "="] & B \end{tikzcd}$$

がそれぞれ ξ と ζ, ζ と η の束同型の時，その合成

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\tilde{g} \circ \tilde{f}"] \arrow[d, "p"] & E'' \arrow[d, "p''"] \\ B \arrow[r, "="] & B \end{tikzcd}$$

は ξ と η の束同型を与えることはすぐわかる。 (読者の練習問題とする。) これで，反射律と推移律が示された。

対称律を示すために

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"] & E' \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, "="] & B \end{tikzcd}$$

を $\xi = (p : E \to B)$ と $\eta = (p' : E' \to B)$ の同型とする。 このとき同型

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "p'"] & E \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "="] & B \end{tikzcd}$$

を構成したい。自然なアイデアは, $\tilde{g} = \tilde{f}^{-1}$ と取ることであろう。$\tilde{f}$ は各ファイバー上で同相であるので全単射となる。 よって連続性を無視すれば $\tilde{f}^{-1}$ は存在し, 上の図式を可換にする。 $\tilde{f}^{-1}$ の連続性を示そう。

$B = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ を B の開被覆で, 各 U_α 上で ξ も η も局所自明化写像を持つものとする。

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha &: p^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times F \\ \psi_\alpha &: {p'}^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times F \end{aligned}$$

をU_α上での局所自明化とする。

$$E' = \bigcup_{\alpha \in A} {p'}^{-1}(U_\alpha)$$

が開被覆なので, 演習問題 2.6.11 より各 ${p'}^{-1}(U_\alpha)$ 上で $\tilde{f}^{-1}$ が連続であることを示せば良い。仮定より, 合成

$$U_\alpha \times F \xrightarrow{\varphi_\alpha^{-1}} p^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\tilde{f}} {p'}^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\psi_\alpha} U_\alpha \times F$$

は, $\psi_\alpha \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, y) = (x, \Phi(x)(y))$ により連続写像

$$\Phi : U_\alpha \longrightarrow \mathrm{Homeo}(F)$$

を定める。各点 $x \in U_\alpha$ に対し $\Psi(x) = \Phi(x)^{-1}$ とおく。ここで $\Phi(x)^{-1}$ は $\Phi(x)$ の $\mathrm{Homeo}(F)$ の元としての逆元, つまり逆写像を表わす。すると, Ψ は次の合成で与えられるので連続である。

$$\Psi : U_\alpha \xrightarrow{\Phi} \mathrm{Homeo}(F) \xrightarrow{\nu} \mathrm{Homeo}(F)$$

ここで ν は G の逆元を取る写像である。この Ψ を用いて

$$g_\alpha : U_\alpha \times F \longrightarrow U_\alpha \times F$$

を $g_\alpha(x,y) = (x, \Psi(x)(y))$ で定義すれば, これは連続であり

$$\psi_\alpha \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}(x,y) = (x, \Phi(x)(y))$$

の逆である。よって

$$\begin{tikzcd}
p'^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, "\psi_\alpha"] \arrow[d, "\tilde{f}^{-1}"] & U_\alpha \times F \arrow[d, "g_\alpha"] \\
p^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, "\varphi_\alpha"] & U_\alpha \times F
\end{tikzcd}$$

となり $\tilde{f}^{-1}$ は連続である。あとは $\tilde{f}^{-1}$ が束写像になることを示せばよいが, これは練習問題とする。 これで対称律が示された。 □

演習問題 3.1.13. 束写像の合成が束写像になることを示せ。

演習問題 3.1.14. $(\tilde{f}, 1_B) : (E, B) \to (E', B)$ を束同型とするとき, $(\tilde{f}^{-1}, 1_B)$ も束写像であることを示せ。

系 3.1.15. $(\tilde{f}, 1_B) : (E, B) \to (E', B)$ が束同型なら, $\tilde{f} : E \to E'$ は同相写像である。

例 3.1.16. M_0 を円筒とし, M_2 を長方形の両端をを 2π だけひねって張り合 わせた空間とする。

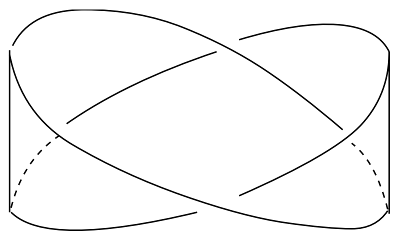


図 3.1: M_2

式で書くと, 例えば次のようになる。

$$\begin{aligned}
M_0 &= \left\{(2\cos\varphi, 2\sin\varphi, t) \,\middle|\, -\tfrac{1}{2} \le t \le \tfrac{1}{2}, 0 \le \varphi \le 2\pi\right\} \\
M_2 &= \left\{((2 + t\cos\varphi)\cos\varphi, (2 + t\cos\varphi)\sin\varphi, t\sin\varphi) \,\middle|\, -\tfrac{1}{2} \le t \le \tfrac{1}{2}, 0 \le \varphi \le 2\pi\right\}
\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}
p_0 : M_0 &\longrightarrow S^1 \\
p_2 : M_2 &\longrightarrow S^1
\end{aligned}$$

を中心線への射影とする。これらは共に単位区間 I (正確には閉区間 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$) をファイバーとするファイバー束になる。 M_0 と M_2 の見た目は違っているが, 実はこのふたつのファ

イバー束は同型になる。特に, 空間として M_0 と M_2 は同相である。同型写像は以下のようにしてできる。

下の図で, 線分 AB, CD で M_2 を切り開き, 手前を E_1 向こう側を E_2 とする。同様に M_0 を線分 $A'B'$, $C'D'$ で切り開き, 手前を E'_1 向こう側を E'_2 とする。

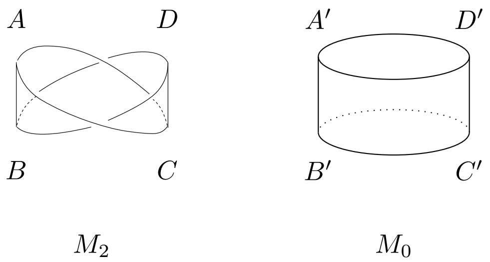


図 3.2: M_2 を切り開く

$ABDC$ を $A'B'C'D'$ に写すことにより同相写像

$$\begin{aligned} f_1 &: E_1 \longrightarrow E'_1 \\ f_2 &: E_2 \longrightarrow E'_2 \end{aligned}$$

を得る。

このふたつの写像は線分 AB, CD で (向きも込めて) うまく張り合わさっていることが分かるので束同型

$$\begin{array}{ccc} M_2 & \xrightarrow{f_1 \cup f_2} & M_0 \\ \downarrow{\scriptstyle p_2} & & \downarrow{\scriptstyle p_0} \\ S^1 & \xrightarrow{=} & S^1 \end{array}$$

を得る。 □

演習問題 3.1.17. Möbiusの帯は, 円筒と同相ではない。 Möbuisの帯でなぜ上と同じことができないか考えよ。

演習問題 3.1.18. 上の例で用いた写像を式で表わし, それらが全て連続であることを確かめよ。

演習問題 3.1.19. M_n を長方形の両端を $n\pi$ だけひねって張り合わせた空間とする。 中心線への射影によりファイバー束

$$p_n : M_n \longrightarrow S^1$$

を得る。このとき,

$$\begin{aligned} M_{2n} &\cong \text{円筒} \\ M_{2n+1} &\cong \text{Möbiusの帯} \end{aligned}$$

であることを示せ。

注意 3.1.20. 上の例で, 例 3.1.15より M_2 と M_0 は同相になる。実際そこで作った写像 $f_1 \cup f_2$ は同相写像である。トポロジーでは同相な空間は同一視するから, M_2 と M_0 は同じ空間とみなすのであるが, 絵に描いてみるとどう見ても違う空間である。M_2 の模型を作っていろいろいじっても M_0 にはならない。また写像 $f_1 \cup f_2$ を作るときに, M_2 を一度切り開いてからまた張り合わせるという「ずるい」ことをやっている。

実は同相な空間を「同じ」空間と考えることに無理があり, 普通の人が「直感的に同じ」と思う空間は, 同相 (homeomorphic) よりもっときつい条件のついた isotopic という関係のことなのである。直感的に同じかどうかは, 3次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$ の中で連続的に動かして同じになるかどうかであり, $\mathbb{R}^3$ の中にどの様に埋め込まれているかが重要なのである。

同相かどうかを考えるときには抽象的に位相空間として考えるので, どんな形をしているか (つまりどのように埋め込まれているか) はどうでもよいのである。写像を作るときにも最後にうまく繋がればよく, 一度切り刻んでからそれぞれの小さな部分で定義し, それを合わせて写像を定義するというのはよくやることである。

この意味で, 同相という概念は, 日常生活の直感からは非常にかけ離れたものだということができるだろう。

一般にファイバー束のことを調べるのに局所自明化写像を用いるのは面倒であるが, 元々のファイバー束の定義が局所自明化で与えられているので, これは避けられない。ファイバー束が同型になる条件を局所自明化写像を使って書いてみよう。

命題 3.1.21. $E \xrightarrow{p} B$, $E' \xrightarrow{p'} B$を同じファイバー F と構造群 G を持ち, G の F への作用も同じであるファイバー束とする。

$\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を B の開被覆で, 各 U_α 上で E と E' の局所自明化が与えられているものとし, $\left\{\Phi^{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G\right\}$, $\left\{\Psi^{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G\right\}$ をそれぞれ E と E' の座標変換とする。このとき E と E' が同型になるための必要十分条件は, 各 $\alpha \in A$ に対し, 連続写像

$$\lambda_\alpha : U_\alpha \longrightarrow G$$

で, 任意の $\alpha, \beta \in A$ と $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ に対し

$$\lambda_\beta(x)^{-1}\Psi^{\alpha\beta}(x)\lambda_\alpha(x) = \Phi^{\alpha\beta}(x)$$

となるものが存在することである。

証明. 必要条件 ($\Longrightarrow$): E, E' の局所自明化をそれぞれ

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha &: p^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times F \\ \psi_\alpha &: p'^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times F \end{aligned}$$

とし，

$$\tilde{f} : E \longrightarrow E'$$

をファイバー束の同型を与える写像とする。 $x \in U_\alpha \cap U_\beta, y \in F$ に対し，

$$\psi_\beta \tilde{f} \varphi_\alpha^{-1}(x, y) = (x, \lambda_{\alpha\beta}(x)(y))$$

と書けるが，束写像の定義より

$$\lambda_{\alpha\beta} = \mathrm{ad}(\mu) \circ \bar{\lambda}_{\alpha\beta}$$

となる連続写像

$$\bar{\lambda}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$$

が存在する。$\lambda_\alpha = \bar{\lambda}_{\alpha\alpha}$ とおく。 このとき，図式

$$\begin{tikzcd}
(U_\alpha \cap U_\beta) \times F & & & (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \\
& p^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \arrow[ul, "\varphi_\alpha"'] \arrow[dl, "\varphi_\beta"] \arrow[r, "\tilde{f}"] & {p'}^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \arrow[ur, "\psi_\beta"] \arrow[dr, "\psi_\alpha"'] & \\
(U_\alpha \cap U_\beta) \times F & & & (U_\alpha \cap U_\beta) \times F
\end{tikzcd}$$

で，左上から ${p'}^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ に行き ψ_α で行って戻ってから右上に行くと

$$\begin{aligned}
\psi_\beta \circ \tilde{f} \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, y) &= \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} \circ \psi_\alpha \circ \tilde{f} \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, y) \\
&= \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(x, \lambda_\alpha(x)(y)) \\
&= (x, \Psi^{\alpha\beta}(x)\lambda_\alpha(x)(y))
\end{aligned}$$

となる。一方，今度は左下に寄り道して行くと

$$\begin{aligned}
\psi_\beta \circ \tilde{f} \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, y) &= \psi_\beta \circ \tilde{f} \circ \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, y) \\
&= \psi_\beta \circ \tilde{f} \circ \varphi_\beta^{-1}(x, \Phi^{\alpha\beta}(x)(y)) \\
&= (x, \lambda_\beta(x)\Phi^{\alpha\beta}(x)(y))
\end{aligned}$$

となるから

$$\lambda_\beta(x)\Phi^{\alpha\beta}(x) = \Psi^{\alpha\beta}(x)\lambda_\alpha(x)$$

となり

$$\Phi^{\alpha\beta}(x) = \lambda_\beta(x)^{-1}\Psi^{\alpha\beta}(x)\lambda_\alpha(x)$$

を得る。

十分条件 ($\Longleftarrow$): 逆に，このような $\lambda_\alpha : U_\alpha \to G$ が与えられているとする。写像

$$\tilde{f}_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow {p'}^{-1}(U_\alpha)$$

を次の合成で定義する。

$$p^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\varphi_\alpha} U_\alpha \times F \xrightarrow{\Lambda_\alpha} U_\alpha \times F \xrightarrow{\psi_\alpha^{-1}} p'^{-1}(U_\alpha)$$

ここで $\Lambda_\alpha(x,y) = (x, \lambda_\alpha(x)(y))$ である。 $x \in p^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ に対しては, 二通りの定義があるが, 条件

$$\lambda_\beta(x)\Phi^{\alpha\beta}(x) = \Psi^{\alpha\beta}(x)\lambda_\alpha(x)$$

により, それらは一致することが容易に分かる (読者は自分でチェックせよ)。 故に, well-defined である束写像

$$\tilde{f} : E \longrightarrow E'$$

を得る。これはファイバー束の同型を与える。 $\square$

証明の最後で次の事実を用いたことに注意する。

補題 3.1.22. 位相空間の間の写像 $f : X \to Y$ を考える。X の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ で $f|_{U_\alpha}$ が連続であるものが存在するならば, f は連続である。

証明. Y の開集合 V に対し,

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(V) \cap U_\lambda = \bigcup_{\alpha \in A} (f|_{U_\alpha})^{-1}(V)$$

となるが, 各 U_α が X の開集合であることと, 仮定から $(f|_{U_\alpha})^{-1}(V)$ が U_α の開集合であることより, 各 $(f|_{U_\alpha})^{-1}(V)$ は X の開集合となり, $f^{-1}(V)$ が X の開集合となる。 $\square$

注意 3.1.23. 命題 3.1.12 の対称律の証明は, 命題 3.1.21 を使えば容易（ほとんど自明）である。しかし, 具体的に束写像の逆を作ることも重要であるので, 敢えて命題 3.1.12 の証明には命題 3.1.21 を用いなかった。

3.2 プルバック (引き戻し)

束写像と深い関係にある概念として, ファイバー束のプルバック (引き戻し) がある。 これはある空間上にファイバー束がある時, それを連続写像で引っ張り戻して別の空間上にファイバー束を作る操作である。

定義 3.2.1. $\xi = (p : E \to B)$ をファイバー束とし, $f : X \to B$ を連続写像とする。このとき

$$f^*(E) = \{(x,e) \in X \times E \mid f(x) = p(e)\}$$

とおき, 写像

$$\begin{aligned} f^*(p) &: f^*(E) \longrightarrow X \\ p^*(f) &: f^*(E) \longrightarrow E \end{aligned}$$

を

$$
\begin{aligned}
f^*(p)(x,e) &= x \\
p^*(f)(x,e) &= e
\end{aligned}
$$

で定義する。

$$
\begin{tikzcd}
f^*(E) \arrow[r, "p^*(f)"] \arrow[d, "f^*(p)"'] & E \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}
\tag{3.4}
$$

このようにして $f^*(E)$ を作る操作をプルバック (*pullback*) と言う。 次の定理により $f^*(p) : f^*(E) \to X$ はファイバー束になるので, このファイバー束を $f^*(\xi)$ と書き, ξ の f によるプルバック (*pullback*) と言う。

定理 3.2.2. $f^*(p) : f^*(E) \to X$ は $p : E \to B$ と同じファイバー F, 同じ構造群 G を持つファイバー束である。

証明. $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を B の開被覆で各 U_α 上で $p : E \to B$ の局所自明化写像

$$\varphi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times F$$

が存在するものとする。 $\varphi_\alpha(e) = (p(e), \bar{\varphi}_\alpha(e))$ と書く。 $f^*(E)$ の局所自明化を見つけるために, まず X の適当な開被覆を見つけなければならないが

$$V_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$$

と置けば, $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ は X の開被覆になる。 写像

$$\psi_\alpha : f^*(p)^{-1}(V_\alpha) \longrightarrow V_\alpha \times F$$

を $\psi_\alpha(x,e) = (x, \bar{\varphi}_\alpha(e))$ で定義する。 $f^*(p)^{-1}(V_\alpha) \subset V_\alpha \times p^{-1}(U_\alpha)$ であることはすぐ分かるので, ψ_α は合成

$$f^*(p)^{-1}(V_\alpha) \hookrightarrow V_\alpha \times p^{-1}(U_\alpha) \stackrel{1_{V_\alpha}\times\bar{\varphi}_\alpha}{\longrightarrow} V_\alpha \times F$$

で定義されている。よって連続である。これらの写像が $f^*(E)$ の局所自明化を与えることを示すために, 写像

$$\gamma_\alpha : V_\alpha \times F \longrightarrow f^*(p)^{-1}(V_\alpha)$$

を $\gamma_\alpha(x,y) = (x, \varphi_\alpha^{-1}(f(x),y))$, つまり, 合成

$$\gamma_\alpha : V_\alpha \times F \stackrel{\Delta\times 1_F}{\longrightarrow} V_\alpha \times V_\alpha \times F \stackrel{1_{V_\alpha}\times f\times 1_F}{\longrightarrow} V_\alpha \times U_\alpha \times F \stackrel{1_{V_\alpha}\times\varphi_\alpha^{-1}}{\longrightarrow} V_\alpha \times p^{-1}(U_\alpha)$$

で定義する。

$$p(\varphi_\alpha^{-1}(f(x),y)) = f(x)$$

より $\gamma_\alpha(x,y) \in f^*(E)$であるので, 写像 $\gamma_\alpha : V_\alpha \times F \to f^*(p)^{-1}(V_\alpha)$ を得る。また

$$\begin{aligned}
\gamma_\alpha \circ \psi_\alpha(x,e) &= \gamma_\alpha(x, \bar{\varphi}_\alpha(e)) \\
&= (x, \varphi_\alpha^{-1}(f(x), \bar{\varphi}_\alpha(e))) \\
&= (x, \varphi_\alpha^{-1}(p(e), \bar{\varphi}_\alpha(e))) \\
&= (x, \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha(e)) \\
&= (x, e) \\
\psi_\alpha \circ \gamma_\alpha(x,y) &= \psi_\alpha(x, \varphi_\alpha^{-1}(f(x), y)) \\
&= (x, \bar{\varphi}_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1}(f(x), y)) \\
&= (x, y)
\end{aligned}$$

より γ_α は ψ_α の逆となり, ψ_α は同相写像である。よって局所自明化写像を与える。

次に構造群について考えよう。 座標変換を調べるために, $(x,y) \in (V_\alpha \cap V_\beta) \times F$ に対し $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(x,y)$ を考える。

$$\begin{aligned}
\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(x,y) &= \psi_\beta \circ \gamma_\alpha(x,y) \\
&= \psi_\beta(x, \varphi_\alpha^{-1}(f(x), y)) \\
&= (x, \bar{\varphi}_\beta(\varphi_\alpha^{-1}(f(x), y)))
\end{aligned}$$

ここで

$$\Phi^{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{Homeo}(F)$$

を $p : E \to B$ の座標変換とすると, 定義から

$$\bar{\varphi}_\beta(\varphi_\alpha^{-1}(f(x), y)) = \Phi^{\alpha\beta}(f(x))(y)$$

である。よって

$$\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(x,y) = (x, \Phi^{\alpha\beta}(f(x))(y))$$

となり, 構造群が G であることが分かる。 □

プルバックの具体的な例を挙げる代わりに, 次の演習問題を考えてもらうことにしよう。

演習問題 3.2.3. 演習問題 3.1.19 の例を考えよう。M_0 は円筒, M_1 は Möbiusの帯, 一般に M_n は長方形の垂直な二辺を $n\pi$ だけ捻って張り合わせた空間だった。中心線への射影

$$M_n \longrightarrow S^1$$

はファイバー束だった。このファイバー束を ξ_n と書く。

$$\varphi_n : S^1 \longrightarrow S^1$$

を $z \in S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ に対し

$$\varphi_n(z) = z^n$$

で定義される写像とするとき, ξ_1 の φ_n によるプルバックが ξ_n と同型になることを示せ。

上の定理の他に, プルバックの持つ性質の中で最も重要なものは, 次のふたつの命題である。

命題 3.2.4. ファイバー束 $p : E \to B$ と連続写像 $f : X \to B$ に対し, 定義 *3.2.1* で定義された写像

$$p^*(f) : f^*(E) \longrightarrow E$$

は束写像を与える。

証明. 図式 (3.4) が可換であることはすぐわかる。$x \in X$ に対し, x 上のファイバーが何か調べよう。

$$\begin{aligned}
x \text{ 上のファイバー} &= f^*(p)^{-1}(x) \\
&= \{(x,e) \in f^*(E) \mid f^*(p)(x,e) = x\} \\
&= \{(x,e) \in X \times E \mid f(x) = p(e)\} \\
&\xrightarrow{\cong} \{e \in E \mid f(x) = p(e)\} \qquad (3.5) \\
&= p^{-1}(f(x)) \\
&= f(x) \text{ 上のファイバー}
\end{aligned}$$

ここで, 対応 (3.5) は $(x,e) \mapsto e$, つまり $p^*(f)$ で与えられている。ゆえに $p^*(f)$ は x 上のファイバーと $f(x)$ 上のファイバーの間の同相を与えている。

もし $p : E \to B$ が構造群 G を持つとき, 定理 3.2.2 の証明より, $f^*(p)$ の座標変換は合成

$$V_\alpha \cap V_\beta = f^{-1}(U_\alpha) \cap f^{-1}(U_\beta) \xrightarrow{f} U_\alpha \cap U_\beta \xrightarrow{\Phi^{\alpha\beta}} \mathrm{Homeo}(F)$$

で与えられることが分かる。よって p の構造群が G で座標変換が

$$U_\alpha \cap U_\beta \xrightarrow{\bar{\Phi}^{\alpha\beta}} G \xrightarrow{\mathrm{ad}(\mu)} \mathrm{Homeo}(F)$$

と分解するとき, $f^*(p)$ の座標変換は

$$V_\alpha \cap V_\beta \xrightarrow{f} U_\alpha \cap U_\beta \xrightarrow{\bar{\Phi}^{\alpha\beta}} G \xrightarrow{\mathrm{ad}(\mu)} \mathrm{Homeo}(F)$$

で与えられ, よって $p^*(f)$ は束写像の構造群に関する条件をみたす。 □

命題 3.2.5. 上の命題の逆が成り立つ。つまり,

$$\begin{aligned}
p &: E \longrightarrow B \\
p' &: E' \longrightarrow X
\end{aligned}$$

をファイバーも構造群も同じファイバー束とし

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p'"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

を束写像とするとき, $E' \xrightarrow{p'} X$ はプルバック $f^*(E) \xrightarrow{f^*(p)} X$ と同型になる。

証明. $(\tilde{f}, f) : (E', X) \to (E, B)$ が束写像だから

$$p \circ \tilde{f} = f \circ p'$$

つまり, 任意の $e \in E'$ に対し $p(\tilde{f}(e)) = f(p'(e))$, 故に $f^*(E)$ の定義より $(p'(e), \tilde{f}(e)) \in f^*(E)$ となる。そこで

$$\bar{f} : E' \longrightarrow f^*(E)$$

を $\bar{f}(e) = (p'(e), \tilde{f}(e))$ で定義する。明らかに, これは連続である。これがファイバー束の同型を与えることを言いたい。まず

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "p'"'] & f^*(E) \arrow[d, "f^*(p)"] \\ X \arrow[r, "="] & X \end{tikzcd}$$

が可換になることは容易に分かる。

$\bar{f}$ が各ファイバー上で同相であることを見るために次の合成を考える。

$$E' \xrightarrow{\bar{f}} f^*(E) \xrightarrow{p^*(f)} E$$

この合成が $\tilde{f}$ であることはすぐわかるから, $p^*(f)$ も $\tilde{f}$ も各ファイバー上で同相写像であることより, $\bar{f}$ も各ファイバー上で同相写像であることがわかる。

次に構造群についての条件を考えよう。 $\{\varphi_\lambda : p^{-1}(U_\lambda) \to U_\lambda \times F\}_{\lambda\in\Lambda}$ と $\{\varphi'_\gamma : p'^{-1}(V_\gamma) \to V_\gamma \times F\}_{\gamma\in\Gamma}$ をそれぞれ $p : E \to B$ と $p' : E' \to X$ の局所自明化とする。このとき, $\{V_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ を十分細分すれば, 各 $f(V_\gamma)$ はいづれかの U_λ に含まれるとしてよい。(そのような開被覆が存在することは, 各自確かめてもらいたい。) また pullback の局所自明化の作り方から, $f^*(E) \to X$ は, 開被覆 $\{f^{-1}(U_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ 上で局所自明化を持つ。その局所自明化を $\{\psi_\lambda : p^*(f)^{-1}(U_\lambda) \to f^{-1}(U_\lambda) \times F\}_{\lambda\in\Lambda}$ としよう。

これらのファイバー束の共通の構造群を G とするとき, $f(V_\gamma) \subset U_\lambda$ となる組について

$$\begin{tikzcd} U_\lambda \arrow[rr, "\mathrm{ad}(\mathrm{pr}_2 \circ \psi_\lambda \circ \tilde{f} \circ {\varphi'_\gamma}^{-1})"] \arrow[dr] & & \mathrm{Homeo}(F) \\ & G \arrow[ur, "\mathrm{ad}(\mu)"'] & \end{tikzcd}$$

と分解することを示せばよい。ここで

$$\varphi_\lambda(e) = (p(e), (\mathrm{pr}_2 \circ \varphi_\lambda)(e))$$

と書くと, 定理 3.2.2 の証明より $f^*(E)$ の局所自明化

$$\psi_\lambda : f^*(p)^{-1}(U_\lambda) \longrightarrow U_\lambda \times F$$

は

$$\psi_\lambda(x, e) = (x, (\mathrm{pr}_2 \circ \varphi_\lambda)(e))$$

で与えられていたことを思い出す。すると, 合成

$$V_\gamma \times F \xrightarrow{{\varphi'_\lambda}^{-1}} {p'}^{-1}(U_\lambda) \xrightarrow{\bar{f}} f^*(p)^{-1}(U_\lambda) \xrightarrow{\psi_\lambda} U_\lambda \times F$$

は

$$(x, y) \longmapsto (x, \mathrm{pr}_2(\varphi_\lambda(\tilde{f}({\varphi'_\gamma}^{-1}(x, y))))) = (x, \mathrm{ad}(\mathrm{pr}_2 \circ \varphi_\lambda \circ \tilde{f} \circ {\varphi'_\gamma}^{-1})(x)(y))$$

で与えられている。よって

$$\mathrm{ad}(\mathrm{pr}_2 \circ \psi_\lambda \circ \bar{f} \circ {\varphi'_\gamma}^{-1}) = \mathrm{ad}(\mathrm{pr}_2 \circ \varphi_\lambda \circ \tilde{f} \circ {\varphi'_\gamma}^{-1})$$

である。ところが $\tilde{f}$ が束写像であることより, 写像 $\mathrm{ad}(\mathrm{pr}_2 \circ \varphi_\lambda \circ \tilde{f} \circ {\varphi'_\gamma}^{-1})$ は次のように分解する。

$$\begin{tikzcd} U_\alpha \arrow[rr, "\mathrm{ad}(\mathrm{pr}_2 \circ \varphi_\lambda \circ \tilde{f} \circ {\varphi'_\gamma}^{-1})"] \arrow[dr] & & \mathrm{Homeo}(F) \\ & G \arrow[ur, "\mathrm{ad}(\mu)"'] & \end{tikzcd}$$

よって $\bar{f}$ は束写像となり, X 上で恒等写像だからファイバー束の同型である。 □

本節を終える前に, プルバックの性質で知っておいた方がよいことを, 更にいくつか挙げておく。

補題 3.2.6. $\xi = (p : E \to B)$ をファイバー束, $f : X \to B$, $g : Y \to X$ を連続写像とするとき, ファイバー束の同型

$$(f \circ g)^*(\xi) \cong g^*(f^*(\xi))$$

を得る。

演習問題 3.2.7. これを証明せよ。

補題 3.2.8. ファイバー束 $\xi = (p : E \to B)$ に対し

$$1_B^*(\xi) \cong \xi$$

である。

証明. 命題 3.2.4 より,

$$p^*(1_B) : 1_B^*(E) \longrightarrow E$$

は束写像となる。底空間上では恒等写像なので, これはファイバー束の同型を与える。 □

定義 3.2.9. $p : E \to B$ をファイバー束とし, $A \subset B$ を部分空間とする。 包含写像を $i : A \hookrightarrow B$ とするとき, $i^*(E)$ を E を A に制限したファイバー束といい, $E|_A$ で表わす。

プルバックの定義で $p : E \to B$ はファイバー束である必要はないことに注意する。一般に写像

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd}$$

に対し

$$X \times_Z Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$$

と定義し, 上の図式のプルバック (*pullback*), 或いはファイバー積 (*fiber product*) という。

命題 3.2.10. 可換な図式

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\tilde{g}"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd}$$

に対し図式

$$\begin{tikzcd} W \arrow[dr, dotted] \arrow[drr, "\tilde{f}"] \arrow[ddr, "\tilde{g}"'] & & \\ & X \times_Z Y \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Y \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd}$$

を可換にする写像

$$\tilde{f} \times_Z \tilde{g} : W \longrightarrow X \times_Z Y$$

が唯一つ存在する。

演習問題 3.2.11. これを証明せよ。

3.3 ファイバー束とホモトピー

前節では, ファイバー束のプルバックを考えた。そこでプルバックの基本的な性質はいくつか調べたが, もちろん, それでプルバックのことがすべて分かったと言うわけではない。例えば, 自然に出てくる疑問として次のものがある: ξ を B 上の ファイバー束 とする。連続写像 $f, g : X \to B$ に対し, いつ $f^*(\xi) \cong g^*(\xi)$ となるだろう。例えば, $f \neq g$ でも $f^*(\xi) \cong g^*(\xi)$ となることがあるだろうか。実は後でみるように (定理 3.3.22), f と g がホモトピックならば $f^*(\xi) \cong g^*(\xi)$ となるのである。

本節では, まずホモトピーの概念を導入し, 次いでファイバー束とホモトピーの関係を調べる。

定義 3.3.1. $f_0, f_1 : X \to Y$ を連続写像とする。もし連続写像

$$H : X \times [0,1] \longrightarrow Y$$

で任意の $x \in X$ に対し

$$\begin{aligned} H(x,0) &= f_0(x) \\ H(x,1) &= f_1(x) \end{aligned}$$

であるものが存在するとき f_0 と f_1 は**ホモトピック** (*homotopic*) であると言い, $f_0 \simeq f_1$ と書く。H を f_0 と f_1 の間の**ホモトピー** (*homotopy*) と言う。

演習問題 3.3.2. ホモトピックという関係 $\simeq$ が同値関係であることを証明せよ。

注意 3.3.3. H が f_0 と f_1 の間のホモトピーのとき, $t \in [0,1]$ と $x \in X$ に対し, 写像

$$f_t : X \longrightarrow Y$$

を $f_t(x) = H(x,t)$ で定義する。つまり $f_t = \mathrm{ad}(H)(t)$ である。補題 2.3.2 より, 任意の $t \in [0,1]$ に対し, これは連続写像 $f_t : X \to Y$ を与え, t が 0 から 1 まで動くとき, 連続写像 f_0 が f_1 に「連続的に」変化することを意味している。

言い替えれば, $f_0 \simeq f_1$ というのは f_0 が f_1 に「連続的に変形できる」ということである。

注意 3.3.4. これから見ていくように, ホモトピーというのはファイバー束の幾何学, 或いはトポロジー全般に於いて中心的な役割を果たす概念である。写像という概念が当たり前のように使われている現在では, 写像を連続的に変形するというアイデアは極く自然なものであるが, 実際にホモトピーが数学の文献に現れたのはそれほど古いことではない。Dieudonné の本 [Die89] によると, 最初にホモトピーという言葉が使われたのは, 1907年の Dehn と Heegaard の論文 [DH07] であり, しかも現在の形で定義されたのは 1911年の Brouwer の論文 [Bro76] が最初らしい。

その後, 様々な幾何学的な現象や概念が, ホモトピーの言葉を用いると統一的に述べられることがわかるにつれ, ホモトピーも一般化し, 自然にホモトピー論という分野が形成された。 そこでは, ファイバー束の一般化であるファイブレーション[1]と, その双対概念であるコファイブレーション[2]を中心に, 種々の抽象的な概念が導入されると共に独自の技術が開発されている。 これについては第II部 [FibII] で詳しく述べる。

トポロジー以外でも, 自然にホモトピーが現れてくることは多い。 例えば複素関数論を勉強したことのある読者なら, ホモトピーの定義から次のことを思い出す (?) だろう:

> C, C' を領域 $D \subset \mathbb{C}$ の中の単純閉曲線とし, f を D 上の正則関数とする。D の中で C が C' に連続的に変形できるなら
> $$\int_C f(z)\,dz = \int_{C'} f(z)\,dz$$
> である。

この事実は, 実はコホモロジー群というものを用いると (トポロジストには) すっきりと説明され, 解析学的な現象が幾何学的 (代数的) に扱えることを示唆する例である。その方向での研究は, 層のコホモロジーの導入により戦後飛躍的に進み, 代数幾何学, 複素多様体論, $\mathcal{D}$加群などの分野に発展している。

余談が長くなってしまったが, ここでホモトピーに戻ることにしよう。 ホモトピーとファイバー束の関係の中で最も基本的なのは次の定理である。

定理 3.3.5 (ホモトピーのリフト). *次の状況を考える:*

1. $p : E \to Y$ と $p' : E' \to X$ はファイバー束
2. $(\tilde{f}_0, f_0) : (E', X) \to (E, Y)$ はファイバーを保つ写像
3. $H : X \times [0,1] \to Y$ は, 任意の $x \in X$ に対し $H(x,0) = f_0(x)$ であるホモトピー

もし X がコンパクト Hausdorff なら H の束写像へのリフト

$$\begin{CD} E' \times [0,1] @>{\widetilde{H}}>> E \\ @V{p' \times 1_{[0,1]}}VV @VV{p}V \\ X \times [0,1] @>{H}>> Y \end{CD}$$

で, 任意 の$e \in E'$ に対し $\widetilde{H}(e,0) = \tilde{f}_0(e)$ であるものが存在する。

[1]第II部 [FibII] の §1.2
[2]第II部 [FibII] の §1.9

一見すると複雑な定理のように思えるが, 定理の内容を次のように図式にすると少しは分かり易いかもしれない。

$$
\begin{tikzcd}
E' \times \{0\} \arrow[rr, "\subset"] \arrow[dr, "="'] \arrow[dd] & & E' \times [0,1] \arrow[dd] \arrow[dr, dotted, "{}^{\exists}\widetilde{H}"] & \\
& E' \arrow[rr, "\tilde{f}_0"] \arrow[dd] & & E \arrow[dd] \\
X \times \{0\} \arrow[rr, "\subset"] \arrow[dr, "="'] & & X \times [0,1] \arrow[dr, "H"] & \\
& X \arrow[rr, "f_0"] & & Y
\end{tikzcd}
$$

この定理は, 上の図で垂直の写像がファイバー束の射影で, 水平の写像が束写像であるように実線の写像が与えられていて, 四角が全て可換なら, 点線の束写像 $\widetilde{H}$ が存在することを言っている。

定理 3.3.5 では, Xがコンパクト Hausdorff であるという条件がついているが, 後で述べるようにこれらは実際にはもっと一般的な条件で成り立つ。 まずは簡単な場合で証明のアイデアを理解してもらうために, コンパクト Hausdorff の場合を扱うのである。

とはいえ, コンパクト Hausdorff の場合でも証明はちょっと面倒なので, 定理 3.3.5 の証明の前に, まず大まかなアイデアを説明しよう。

$p : E \to Y$ が自明束の場合, $\widetilde{H}$ は簡単に作れる。 実際, $E = Y \times F$ により $\tilde{f}_0(e) = (\tilde{f}_0'(e), \tilde{f}_0''(e))$ と書けているなら

$$\widetilde{H}(e,t) = (H(p'(e),t), \tilde{f}_0''(e))$$

とおけばよい。

そこで $E \to Y$ を小さな自明束に分割し, それに従って $E' \to X$ も分割する。するとそれぞれの小さなファイバー束上では $\widetilde{H}$ が構成できるので, 後はそれらを張り合わせればよい。もちろん, 問題はそれらがうまく張り合わせられるかどうかであるが, 今 X がコンパクトであると仮定しているので, 小さなファイバー束への分割は有限個で済み, 順番に張り合わせていけばよい。 ただし「境界」でうまく張り合わさっているように注意しなければならない。

このアイデアを具体化するには, コンパクト Hausdorff空間の様々な性質を使わなければならなくなるので, 証明の前にそれらについてまとめておこう。 詳しい証明は位相空間論の教科書, 例えば [Kel75; 松坂和68] などを見られたい。

まずコンパクト Hausdorff 空間の持つ最も基本的な性質は, 次のものである。

定理 3.3.6. コンパクト *Hausdorff* 空間は正規 *(normal)* である。

これは直接使われるよりも, 次の形で使われることが多い。

定理 3.3.7 (Urysohnの補題). X が正規で $W \subset W' \subset X$ が $\overline{W} \subset W'$ をみたす X の開集合とすると, 連続写像 $u : X \to [0,1]$ で

$$\begin{aligned} u(\overline{W}) &= 1 \\ u(X - W') &= 0 \end{aligned}$$

をみたすものが存在する。

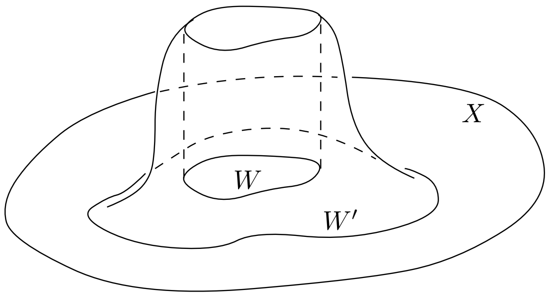


図 3.3: 写像 $u : X \to [0,1]$ のグラフ

定理 3.3.5 の証明のためには, $X \times [0,1]$ の上のファイバー束 $E' \times [0,1]$ を考える必要があるので, その局所自明化を扱わないといけない。その際の $X \times [0,1]$ の開被覆は, 直積空間の開被覆なのだから, 直積の形になっている開集合に取り直したい。 実際, それは可能で, またその際, $[0,1]$ の方は共通したものが取れる。 その時, 次のコンパクト距離空間の性質を用いる。

補題 3.3.8. コンパクト距離空間 (X,d) の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対し, $\sigma > 0$ で次の性質を持つものが存在する

$$d(A) < \sigma \Longrightarrow \exists\lambda \in \Lambda \ \textit{s.t.} \ A \subset U_\lambda$$

ここで $d(A) = \sup\{d(a,a') \mid a, a' \in A\}$ は A の直径である。

ここに登場した数 τ を被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の Lebesgue 数 という。 証明は, 位相空間論の教科書を参照してもらいたい。

補題 3.3.9. X をコンパクトとする。$X \times [0,1]$ の任意の開被覆 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ に対し, $[0,1]$ の分割 $0 < \frac{1}{\ell} < \frac{2}{\ell} < \cdots < \frac{\ell-1}{\ell} < 1$ と X の開集合 $U_{1,1}, \ldots, U_{n_1,1}, \ldots, U_{1,\ell}, \ldots, U_{n_\ell,\ell} \subset X$ で

次の条件をみたすものがとれる: $W_1 = [0, \frac{4}{3\ell})$, $W_2 = (\frac{2}{3\ell}, \frac{7}{3\ell})$, ..., $W_\ell = (\frac{3\ell-4}{3\ell}, 1]$ とおくとき

- $\bigcup_{k=1}^{\ell} \bigcup_{i=1}^{n_k} U_{i,k} \times W_k = X \times [0,1]$
- 各 (i,k) に対し, $U_{i,k} \times W_k \subset V_\alpha$ となる $\alpha \in A$ が存在する。

証明. 任意の $(x,t) \in X \times [0,1]$ に対し

$$(x,t) \in U_{x,t} \times V_{x,t} \subset V_\alpha$$

となる α が存在するような開集合 $U_{x,t} \subset X$ と $V_{x,t} \subset [0,1]$ がとれる。

各 $t \in [0,1]$ に対し $\{U_{x,t}\}_{x \in X}$ は X の開被覆だから, X がコンパクトであることより, その中から有限個 $U_{x_1,t}, \ldots, U_{x_{n_t},t}$ を選び X を覆うことができる。

$$V_t = \cap_{i=1}^{n_t} V_{x_i,t}$$

とおく。すると

$$\bigcup_{i=1}^{n_t} U_{x_i,t} \times V_t = X \times V_t$$

である。

ここで $\{V_t\}_{t \in [0,1]}$ は $[0,1]$ の開被覆であり, $[0,1]$ はコンパクト距離空間だから, 補題 3.3.8 の数 σ が存在する。$\frac{5}{3\ell} < \sigma$ となる $\ell \in \mathbb{N}$ を選び $W_1 = [0, \frac{4}{3\ell})$, $W_2 = (\frac{2}{3\ell}, \frac{7}{3\ell})$, ..., $W_\ell = (\frac{3\ell-4}{3\ell}, 1]$ とおくと, $d(W_k) \leq \frac{5}{3\ell}$ となり, 各 k に対し $W_k \subset V_{t_k}$ となる t_k が存在する。このとき, 各 k に対し

$$\bigcup_{i=1}^{n_{t_k}} U_{x_i,t_k} \times V_{t_k} = X \times V_{t_k}$$

であり, $1 \leq i \leq n_{t_k}$ に対し

$$U_{x_i,t_k} \times W_k \subset U_{x_i,t_k} \times V_{x_i,t_k} \subset V_\alpha$$

となる。これで求める $[0,1]$ の分割

$$0 < \frac{1}{\ell} < \frac{2}{\ell} < \cdots < \frac{\ell-1}{\ell} < 1$$

と X の開被覆が得られた。 □

以上により定理 3.3.5 を証明する準備ができた。

定理 3.3.5 の証明. $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を各 V_α 上で $E \to Y$ の局所自明化写像が存在する Y の開被覆とする。また

$$\varphi_\alpha : p^{-1}(V_\alpha) \longrightarrow V_\alpha \times F$$

を V_α 上の局所自明化写像とする。

$\{H^{-1}(V_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ は $X\times[0,1]$ の開被覆であるが, 補題 3.3.9 より, $[0,1]$ の分割 $0<\frac{1}{\ell}<\frac{2}{\ell}<\cdots<\frac{\ell-1}{\ell}<1$ と 開集合 $U_{1,1},\ldots,U_{n_1,1},\ldots,U_{1,\ell},\ldots,U_{n_\ell,\ell}\subset X$ で

$$\bigcup_{k=1}^{\ell}\bigcup_{i=1}^{n_k}U_{i,k}\times W_k=X\times[0,1]$$

かつ, 各 (i,k) に対し, $U_{i,k}\times W_k\subset H^{-1}(V_\alpha)$ となる $\alpha\in A$ が存在する。ここで, $W_1=[0,\frac{4}{3\ell})$, $W_2=(\frac{2}{3\ell},\frac{7}{3\ell})$, ..., $W_\ell=(\frac{3\ell-4}{3\ell},1]$ だった。 このとき, $t_k=\frac{k}{\ell}$ とおくと, 各 k に対し $t_k\in W_k\cap W_{k+1}$ である。

k に関する帰納法で, $\widetilde{H}$ を $E'\times[0,t_k]$ の上に構成していく。$k=0$ のとき $E'\times\{0\}$ 上では $\tilde{f}_0$ を用いればよい。$E'\times[0,t_k]$ まで定義されたとして, これを $E'\times[0,t_{k+1}]$ 上まで拡張したい。 まず $E'\times[t_k,t_{k+1}]$ 上で $\widetilde{H}$ を定義するために, $X\times[t_k,t_{k+1}]$ をうまく分割する。

定理 3.3.6 により X は正規なので $x\in U_{i,k+1}$ の時

$$x\in O,\ \overline{O}\subset O',\ \overline{O}'\subset U_{i,k+1}$$

となる X の開集合の組 (O',O) が存在する。今, X はコンパクトだからそれらの中から有限個の組 $\{(O'_j,O_j)\}_{j=1,\ldots,s}$ を選んで $X=\cup_{j=1}^{s}O_j$ とできる。

$[0,1]$ の代わりに $[t_k,t_{k+1}]$ を使い, 各 (O'_j,O_j) に Urysohnの補題 (定理 3.3.7) を適用すれば, 連続写像 $u_j:X\to[t_k,t_{k+1}]$ で

$$\begin{aligned}u_j(\overline{O_j})&=t_{k+1}\\u_j(X-O'_j)&=t_k\end{aligned}$$

であるものが得られる。これらの関数を用いて $x\in X$ に対し

$$\begin{aligned}\tau_0(x)&=t_k\\\tau_j(x)&=\max\{u_1(x),\cdots,u_j(x)\}\end{aligned}$$

とおく。すると

$$t_k=\tau_0(x)\le\tau_1(x)\le\ldots\le\tau_s(x)=t_{k+1}$$

そして

$$X_j=\{(x,t)\in X\times[t_k,t_{k+1}]\,|\,t\le\tau_j(x)\}$$

とおく。これで $X\times[t_k,t_{k+1}]$ を閉部分集合の増加列

$$X_0=X\times\{t_k\}\subset X_1\subset X_2\subset\cdots\subset X_s=X\times[t_k,t_{k+1}]$$

として表せた。 $E'\times[0,1]$ を X_j に制限[3]したファイバー束を E'_j とすると, ファイバー束の増加列

$$E'_0=E'\times\{t_k\}\subset E'_1\subset\cdots\subset E'_s=E'\times[t_k,t_{k+1}]$$

[3]定義 3.2.9

を得る。

そこで帰納的に求めるホモトピーが E'_{j-1} 上まで定義できたとする。 それを $\widetilde{H}_{j-1}$ とする。これを拡張して

$$\widetilde{H}_j : E'_j \times [0,1] \longrightarrow E$$

を作りたい。 そのために, X_j を X_{j-1} とそれ以外に分ける。$1 \leq j \leq s$ に対し

$$X_{j-1,j} = \left\{ (x,t) \in \overline{O'_j} \times [t_k, t_{k+1}] \,\middle|\, \tau_{j-1}(x) \leq x \leq \tau_j(x) \right\}$$

とおくと, $X_j = X_{j-1} \cup X_{j-1,j}$ であり, その構成法から, $U_{i,k+1}$ と V_α が存在して

$$\begin{array}{rcl} X_{j-1,j} & \subset & \overline{O'_j} \times [t_k, t_{k+1}] \\ \overline{O}'_j \times [t_k, t_{k+1}] & \subset & U_{i,k+1} \times [t_k, t_{k+1}] \\ H(U_{i,k+1} \times [t_k, t_{k+1}]) & \subset & V_\alpha \end{array}$$

となる。

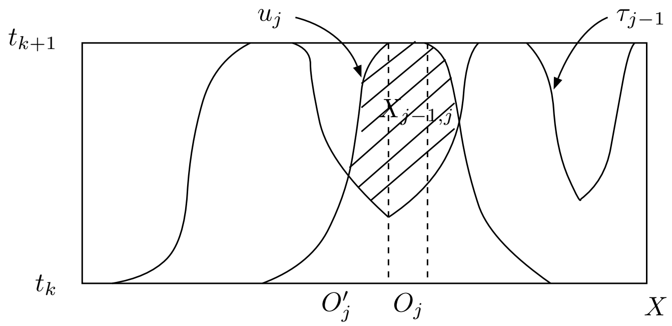


図 3.4: $X \times [0,1]$ の分割

また, $E'_{j-1,j} = E'|_{X_{j-1,j}}$ とおくと, $E'_j = E'_{j-1} \cup E'_{j-1,j}$ である。 V_α 上での $E \to Y$ の局所自明化写像を

$$\varphi_\alpha(e) = (p(e), \bar{\varphi}_\alpha(e))$$

と書き, $(e,t) \in E'_{j-1,j}$ に対し

$$\widetilde{H}_j(e,t) = \varphi_\alpha^{-1}(H(p'(e),t), \bar{\varphi}_\alpha(\widetilde{H}_{j-1}(e, \tau_{j-1}(p'(e)))))$$

とおく。明らかに $E'_{j-1,j}$ 上では連続である。 また当然

$$\widetilde{H}_j|_{E'_{j-1} \times [0,1]} = \widetilde{H}_{j-1}$$

と定義する。$E'_{j-1,j}$ と E'_{j-1} の境界上, つまり $t=\tau_{j-1}(p'(e))$ の時には,

$$\begin{aligned}\text{右辺} &= \varphi_\alpha^{-1}(H(p'(e),t),\bar{\varphi}_\alpha(\widetilde{H}(e,t))) \\ &= \varphi_\alpha^{-1}(p\circ\widetilde{H}(e,t),\bar{\varphi}_\alpha(\widetilde{H}(e,t))) \\ &= \varphi_\alpha^{-1}\circ\varphi_\alpha(\widetilde{H}(e,t)) \\ &= \widetilde{H}(e,t)\end{aligned}$$

となり $\widetilde{H}_{j-1}$ と一致する。これで $\widetilde{H}_{j-1}$ は E'_j 上に拡張された。以上により求める $\widetilde{H}$ が $E'\times[0,1]$ 上定義される。 □

演習問題 3.3.10. この $\widetilde{H}$ が定理の条件を満たしていることを確かめよ。

上の証明で重要なアイデアは, $X\times[0,1]$ を境界が連続関数のグラフで表わされているような閉集合に分割することである。 そのような閉集合で十分小さなものに分割しておいて, それぞれの閉集合上で局所自明化を用いてホモトピーを定義するわけである。 それらがうまく張り合わさって, 連続なホモトピーができていることを確かめるためには, 境界上で一致していることをみればよかった。その際に使ったのは, 次の事実である。

補題 3.3.11. 位相空間 X の閉集合 A と B 上で定義されている連続写像

$$\begin{aligned} f &: A\longrightarrow Y \\ g &: B\longrightarrow Y\end{aligned}$$

が $f|_{A\cap B}=g|_{A\cap B}$ をみたすならば, 連続写像

$$f\cup g : A\cup B\longrightarrow Y$$

で, $(f\cup g)|_A=f$ かつ $(f\cup g)|_B=g$ であるものが一意的に存在する。

演習問題 3.3.12. この補題を証明せよ。

よって, 定理 3.3.5 を一般化するためには, 上の証明の τ_j のような関数が存在すればよい。

定義 3.3.13. 位相空間 X の被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ が与えられたとする。 この被覆に従属する 1 の分割 (*partition of unity*) とは, 連続関数の族

$$f_\gamma : X\longrightarrow[0,1]\quad(\gamma\in\Gamma)$$

で次の条件をみたすものである:

1. $\{\mathrm{Supp}(f_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ は局所有限な X の被覆である。つまり

$$X=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\mathrm{Supp}(f_\gamma)$$

であり, また任意の $x \in X$ に対し, x の開近傍 U で有限個の $\mathrm{Supp}(f_\gamma)$ としか交わらないものが存在する。ここで

$$\mathrm{Supp}(f_\gamma) = \overline{\{x \in X \mid f_\gamma(x) \neq 0\}}$$

である。

2. 任意の $x \in X$ に対し
$$\sum_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma(x) = 1$$
である。

3. 任意の $\gamma \in \Gamma$ に対し
$$\mathrm{Supp}(f_\gamma) \subset U_\alpha$$
となる $\alpha \in A$ が存在する。

それに従属する 1 の分割を持つ被覆を *numerable* な被覆という。

上の定義で, numerable な被覆は開被覆でなくてもよいことに注意する。Dold は, この numerable な被覆という概念を用いて定理 3.3.5 を一般化した。

定理 3.3.14. $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *を位相空間* B *の numerable な被覆とし,*

$$p : E \longrightarrow B$$

をファイバー束とする。各 U_α *上で* p *が自明ならば, 任意の位相空間* X *に対し定理 3.3.5 が成り立つ。*

証明. 省略。興味のある読者は, Dold の論文 [Dol63] を参照されたい。 □

注意 3.3.15. この定理では, 仮定は X に対する条件ではなく B の条件であることに注意する。なお, Dold はファイバー束に限らず一般の連続写像 $p : E \to B$ を扱っている。

実は, Dold が証明したのは定理 3.3.14 ではなく, それと同値な次の形である。

系 3.3.16 (被覆ホモトピー定理). $p : E \to B$ *を ファイバー束,*

$$\begin{aligned} f &: X \longrightarrow B \\ \tilde{f} &: X \longrightarrow E \end{aligned}$$

を連続写像で

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

を可換にするものとする。更に $H : X \times [0,1] \to B$ を f から始まる ホモトピー, つまり $H(x,0) = f(x)$ であるものとする。

このとき, もし B が *numerable* な被覆を持つなら, ホモトピー

$$\widetilde{H} : X \times [0,1] \longrightarrow E$$

で $\widetilde{H}(x,0) = \tilde{f}(x)$ かつ

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \times [0,1] \arrow[ur, "\widetilde{H}"] \arrow[r, "H"'] & B \end{tikzcd}$$

を可換にするものが存在する。

これも定理 3.3.5 のように図式で描いた方が覚え易い。

$$\begin{tikzcd} X \times \{0\} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times [0,1] \arrow[ur, dotted, "{}^{\exists}\widetilde{H}"] \arrow[r, "H"'] & B \end{tikzcd}$$

被覆ホモトピー定理は, 四角が可換であるとき, 斜めの点線の写像 $\widetilde{H}$ で二つの三角を可換にするようなものが存在することをいっている。

系 *3.3.16* の証明. 定理 3.3.14 で $E' \to X$ を自明束 $X \xrightarrow{=} X$ に取れば良い。 □

実は定理 3.3.14 は系 3.3.16 と同値なのであるが, それは読者各自で確かめてもらいたい。

演習問題 3.3.17. 系 3.3.16 から定理 3.3.14 を導け。

Dold の定理 3.3.14 が適用できるのは, 例えば次の場合である。

定義 3.3.18. 位相空間 X がパラコンパクト (*paracompact*) であるとは, X の任意の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が局所有限な細分を持つことである。つまり X の開被覆 $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$ で, 次の条件をみたすものが存在する。

1. 任意の $\beta \in B$ に対し $V_\beta \subset U_\alpha$ となる $\alpha \in A$ が存在する。
2. 任意の $x \in X$ に対し, x の開近傍 U で, U と交わる V_β は有限個しか存在しないものが存在する。

定理 3.3.19. パラコンパクト *Hausdorff*空間は任意の開被覆に従属する*1*の分割を持つ。

証明. 省略。位相空間論の教科書, 例えば Dugundi の本 [Dug78] の Chapter VIII §4 を参照。 □

系 3.3.20. B をパラコンパクト *Hausdorff* とし,

$$p : E \longrightarrow B$$

をファイバー束とする。すると任意の位相空間 X に対し系 *3.3.16* が成り立つ。

本節を終わる前に, もう一つ定理 3.3.5の系を述べる。

系 3.3.21. X がパラコンパクト *Hausdorff* で, $p : E \to X \times [0,1]$ がファイバー束なら, X 上のファイバー束 $p' : E' \to X$ が存在し, $p : E \to X \times [0,1]$ は $p' \times 1_{[0,1]} : E' \times [0,1] \to X \times [0,1]$ と同型になる。

証明. $i_0 : X = X \times \{0\} \hookrightarrow X \times [0,1]$ を包含写像として, $E' = i_0^*(E)$ とおく。よって束写像

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r] \arrow[d, "p'"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "i_0"] & X \times [0,1] \end{tikzcd}$$

を得る, ここで E' は E の部分空間であり, p' は p の制限である。 定理 3.3.5 を使うために, 底空間の間のホモトピー H が必要であるが, それには恒等写像

$$H = 1_{X\times[0,1]} : X \times [0,1] \xrightarrow{=} X \times [0,1]$$

を使えば良い。$H(x,0) = (x,0) = i_0(x)$ だから定理 3.3.5 の仮定をみたし, 束写像

$$\begin{tikzcd} E' \times [0,1] \arrow[r, "\widetilde{H}"] \arrow[d, "p' \times 1_{[0,1]}"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times [0,1] \arrow[r, "H"] & X \times [0,1] \end{tikzcd}$$

を得る。しかし H は恒等写像なので, 定義によりこれはファイバー束の同型である。 □

この系から導かれる結果として重要なのが, 次の定理である。これは, ファイバー束とホモトピーの関係の内で最も顕著なものの一つであり, 次節のファイバー束の分類に於いて重要な役割を果たす。

定理 3.3.22. $p : E \to Y$ をファイバー束とする。$f_0, f_1 : X \to Y$ を連続写像で $f_0 \simeq f_1$ であるものとする。もし X がパラコンパクト *Hausdorff* ならば, ファイバー束の同型

$$\begin{array}{ccc} f_0^*(E) & \cong & f_1^*(E) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & = & X \end{array}$$

を得る。

証明. $H : X \times [0,1] \to Y$ を f_0 から f_1 へのホモトピーとする。E の H によるプルバック $H^*(E)$ は, $X \times [0,1]$ 上のファイバー束である。上の系により, X 上のファイバー束 $E' \to X$ が存在し, ファイバー束の同型

$$H^*(E) \cong E' \times [0,1]$$

を得る。また各 $t \in [0,1]$ に対し

$$i_t : X = X \times \{t\} \hookrightarrow X \times [0,1]$$

を包含写像とすると

$$\begin{aligned} f_0 &= H \circ i_0 \\ f_1 &= H \circ i_1 \end{aligned}$$

であるから命題 3.2.6を用いれば,

$$\begin{aligned} f_0^*(E) &= (H \circ i_0)^*(E) = i_0^*(H^*(E)) \cong i_0^*(E' \times [0,1]) \\ f_1^*(E) &= (H \circ i_1)^*(E) = i_1^*(H^*(E)) \cong i_1^*(E' \times [0,1]) \end{aligned}$$

となる。しかし任意の$t \in [0,1]$に対し

$$\begin{array}{ccccc} E' & = & E' \times \{t\} & \hookrightarrow & E' \times [0,1] \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ X & = & X \times \{t\} & \xrightarrow{i_t} & X \times [0,1] \end{array}$$

は束写像だから命題 3.2.5により $E' \cong i_1^*(E' \times [0,1])$ となる。よって

$$f_0^*(E) \cong i_0^*(E' \times [0,1]) \cong E' \cong i_1^*(E' \times [0,1]) \cong f_1^*(E)$$

となり定理は証明された。 □

3.4 ファイバー束の分類: 単純な場合

前節では, ホモトピーとファイバー束の関係を調べた。本節では, ホモトピーの意味で単純な空間の上のファイバー束を調べる。ホモトピーの意味で最も単純な空間は, 可縮な空間と呼ばれるものである。

定義 3.4.1. 空間 X が可縮 (*contractible*) であるとは, X が連続的に一点に縮められることである。より正確には, X の中の一点 $x_0 \in X$ とホモトピー

$$H : X \times [0,1] \longrightarrow X$$

で任意の $x \in X$ に対し

$$
\begin{aligned}
H(x,0) &= x \\
H(x,1) &= x_0
\end{aligned}
$$

であるものが存在することである。別の言い方をすれば X の恒等写像 1_X と x_0 への定値写像 c_{x_0} の間のホモトピーが存在することである。 このホモトピー H を X の x_0 への *contraction* という。

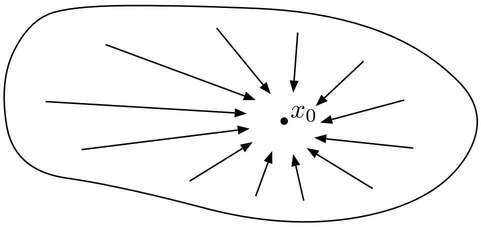


図 3.5: 可縮な空間

演習問題 3.4.2. n次元のディスク

$$D^n = \{(x_1,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$$

および $\mathbb{R}^n$ が可縮であることを証明せよ。より一般に $\mathbb{R}^n$ の凸集合は可縮であることを示せ。

前節の結果より, 可縮な空間上には単純なファイバー束しか存在しないだろうと予想される。

定理 3.4.3. X をパラコンパクト *Hausdorff*空間, $p : E \to X$ をファイバーが F のファイバー束とする。もし X が可縮なら E は自明束と同型, つまり束写像

$$
\begin{array}{ccc}
X \times F & \xrightarrow{\cong} & E \\
\downarrow & & \downarrow \\
X & = & X
\end{array}
$$

が存在する。

証明. X が可縮なので, $x_0 \in X$ と, 1_X と c_{x_0} の間のホモトピー $H : X \times [0,1] \to X$ が存在する。定理 3.3 により同型

$$1_X^*(E) \cong c_{x_0}^*(E)$$

を得る。しかし,

$$\begin{aligned} 1_X^*(E) &= \{(x,e) \in X \times E \,|\, 1_X(x) = p(e)\} \\ &= \{(x,e) \in X \times E \,|\, x = p(e)\} \\ &= \{(p(e),e) \in X \times E \,|\, e \in E\} \\ &\cong E \end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned} c_{x_0}^*(E) &= \{(x,e) \in X \times E \,|\; c_{x_0}(x) = p(e)\} \\ &= \{(x,e) \in X \times E \,|\, x_0 = p(e)\} \\ &= X \times \{e \in E \,|\, x_0 = p(e)\} \\ &= X \times p^{-1}(x_0) \\ &= X \times F \end{aligned}$$

よって $E \cong X \times F$ である。 □

この定理により, 可縮な空間の上のファイバー束は完全に分類された。 特に, n次元のディスク D^n上のファイバー束はすべて自明である。

可縮な空間の次に単純な空間としては, 例えば, 可縮な空間をふたつ張り合わせた空間が考えられる。 例として球面上のファイバー束を考えよう。

$$\begin{aligned} S_+^n &= \{(x_0, \cdots, x_n) \in S^n \,|\, x_n \geq 0\} \\ S_-^n &= \{(x_0, \cdots, x_n) \in S^n \,|\, x_n \leq 0\} \end{aligned}$$

を n次元球面 S^n の上半及び下半球面とすると

$$S^n = S_+^n \cup S_-^n \tag{3.6}$$

である。また S_+^n も S_-^n も D^n に同相であり可縮である。 G を位相群とし $p : E \to S^n$ を F をファイバーとするファイバー束とする。

$$\begin{aligned} i_+ &: S_+^n \hookrightarrow S^n \\ i_- &: S_-^n \hookrightarrow S^n \end{aligned}$$

を包含写像とすると, S_+^n, S_-^n は可縮だから E の S_+^n, S_-^n への制限 $i_+^*(E)$, $i_-^*(E)$ は自明である。

$$\begin{aligned} \varphi_+ &: i_+^*(E) \xrightarrow{\cong} S_+^n \times F \\ \varphi_- &: i_-^*(E) \xrightarrow{\cong} S_-^n \times F \end{aligned}$$

を自明化とする。 これらを用いて「分類写像」を次のように定義する。

定義 3.4.4. 上記の仮定の下で, 合成

$$(S_+^n \cap S_-^n) \times F \xrightarrow{\varphi_+^{-1}} p^{-1}(S_+^n \cap S_-^n) \xrightarrow{\varphi_-} (S_+^n \cap S_-^n) \times F \tag{3.7}$$

を考える。この写像の adjoint

$$S^{n-1} \cong S_+^n \cap S_-^n \longrightarrow \mathrm{Homeo}(F)$$

を $B(p)$ とかき, p の**分類写像**という。

ここで p が構造群 G を持つとしよう。 構造群を考えるためには座標変換が必要になる。S_+^n と S_-^n は開集合ではないが, 少し膨らませれば可縮な開集合になる。例えば $0 < \varepsilon < 1$ を取り

$$\begin{aligned} U_{+,\varepsilon} &= \{(x_0, \cdots, x_n) \in S^n \mid x_n \geq -\varepsilon\} \\ U_{-,\varepsilon} &= \{(x_0, \cdots, x_n) \in S^n \mid x_n \leq \varepsilon\} \end{aligned}$$

ととればよい。 $i_{\pm,\varepsilon} : U_{\pm,\varepsilon} \hookrightarrow S^n$ を包含写像とすると, $U_{\pm,\varepsilon}$ が可縮なことから, ファイバー束の同型

$$\varphi_{\pm,\varepsilon} : i_{\pm,\varepsilon}^*(E) \xrightarrow{\cong} U_{\pm,\varepsilon} \times F$$

を得る。よって (3.7) と同様に

$$\Phi_{+-} : U_{+,\varepsilon} \cap U_{-,\varepsilon} \longrightarrow \mathrm{Homeo}(F)$$

を得るが, もし $\varphi_{\pm,\varepsilon}$ が p の構造群を G と考えたときの局所自明化写像になっている場合,

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr] & & \mathrm{Homeo}(F) \\ & U_{+,\varepsilon} \cap U_{-,\varepsilon} \arrow[ul, dotted, "\overline{\Phi}_{+-}"] \arrow[ur, "\Phi_{+-}"'] & \end{tikzcd}$$

を可換にする写像 $\overline{\Phi}_{+-}$ を得る。この場合, その制限

$$S^{n-1} = S_+^n \cap S_-^n \hookrightarrow U_{+,\varepsilon} \cap U_{-,\varepsilon} \xrightarrow{\overline{\Phi}_{+-}} G$$

を分類写像と呼ぶことにし, 同じ記号 $B(p)$ で表すことにする。

さて, 分解 (3.6) により E は自明束 $S_+^n \times G$ と $S_-^n \times G$ を座標変換写像 により張り合わせてできたと考えられる。構造群が G だから, 座標変換 (3.7) あるいはその $U_+ \cap U_-$ への拡張は連続写像 $B(p)$ によって定まっている。この写像が分類写像と呼ばれる意味は, 次の定理で与えられる。

定理 3.4.5. G を弧状連結な位相群として

$$\begin{aligned} p &: E \longrightarrow S^n \\ p' &: E' \longrightarrow S^n \end{aligned}$$

を G を構造群に持つファイバー束とする。 E と E' が共にある $0 < \varepsilon < 1$ に対し, 局所自明化

$$\begin{aligned} \psi_{\pm,\varepsilon} &: p^{-1}(U_{\pm,\varepsilon}) \longrightarrow U_{\pm,\varepsilon} \times G \\ \psi_{\pm,\varepsilon} &: (p')^{-1}(U_{\pm,\varepsilon}) \longrightarrow U_{\pm,\varepsilon} \times G \end{aligned}$$

を持つとする。 このとき E と E' が同型になるための必要十分条件は, 分類写像 $B(p)$ と $B(p')$ がホモトピック $B(p) \simeq B(p')$ となることである。

この定理の証明のためには, 命題 3.1.21 の次の改良版が必要になる。

命題 3.4.6. $E \xrightarrow{p} B$, $E' \xrightarrow{p'} B$を同じファイバー F と構造群 G を持ち, G の F への作用も同じであるファイバー束とする。

$\{F_i\}_{i=1,\ldots,n}$ を B の有限閉被覆で, 各i に対し $F_i \subset U_i$ であり, U_i 上で E と E' の局所自明化が与えられている開集合 U_i が存在するとする。

各 $1 \leq i, j \leq n$ に対し, $\left\{\Phi^{ij} : F_i \cap F_j \to G\right\}$, $\left\{\Psi^{ij} : F_i \cap F_j \to G\right\}$ をそれぞれ E と E' の座標変換の制限とする。このとき E と E' が同型になるための必要十分条件は, 各 $1 \leq i \leq n$ に対し, 連続写像

$$\lambda_i : F_i \longrightarrow G$$

で, 任意の $1 \leq i, j \leq n$ と $x \in F_i \cap F_j$ に対し

$$\lambda_j(x)^{-1}\Psi^{ij}(x)\lambda_i(x) = \Phi^{ij}(x)$$

となるものが存在することである。

証明. 必要条件の方は, 命題 3.1.21 から従う。 十分条件であることの証明もほとんど命題 3.1.21 の証明と同じである。 命題 3.1.21 のときは, 各 α について写像 $\tilde{f}_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \to p'^{-1}(U_\alpha)$ を作り, それらを貼り合せて $\tilde{f} : E \to E'$ を作った。 そこで使ったのは, 補題 3.1.22 だった。

閉集合について対応する事実としては, 補題 3.3.11 がある。これを繰り返し使えば, 十分条件であることが証明できる。 □

定理 *3.4.5* の証明. <u>必要条件($\Longrightarrow$)</u>: $B(p)$, $B(p')$ は局所自明化によって定義されているので, 局所自明化とファイバー束の同型の関係を述べた命題 3.1.21 あるいは, その閉被覆版 (命題 3.4.6) を用いる。

$$\tilde{f} : E \longrightarrow E'$$

がファイバー束の同型を与えているとする。命題 3.1.21 により, $\tilde{f}$ は

$$\begin{aligned} \lambda_+ &: U_{+,\varepsilon} \longrightarrow G \\ \lambda_- &: U_{-,\varepsilon} \longrightarrow G \end{aligned}$$

によって定まる。$B(p)$, $B(p')$ は，それぞれ E, E' の座標変換の制限だったから，任意の $x \in S^{n-1} = S^n_+ \cap S^n_-$ に対し

$$B(p)(x) = \lambda_-(x)^{-1}B(p')(x)\lambda_+(x)$$

である。この $\lambda_\pm$ を用いて $B(p)$ と $B(p')$ の間のホモトピーを作りたい。

まず S^n_+ は可縮だったから S^n_+ を $x_0 = (1, 0, \ldots, 0) \in S^{n-1}$ に縮めるホモトピーを

$$H_+ : S^n_+ \times [0,1] \longrightarrow S^n_+$$

とおく。$x \in S^n_+$ に対し

$$\begin{aligned} H_+(x,0) &= x \\ H_+(x,1) &= x_0 \end{aligned}$$

である。この H_+ を用いて $(x,t) \in S^n_+ \times [0,1]$ に対し

$$h_+(x,t) = \lambda_+(H_+(x,t))$$

とおく。同様に S^n_- を x_0 に縮めるホモトピーを

$$H_- : S^n_- \times [0,1] \longrightarrow S^n_-$$

とし

$$h_-(x,t) = \lambda_-(H_-(x,t))$$

とおく。最後に，$(x,t) \in S^{n-1} \times [0,1]$ に対し

$$F(x,t) = h_-(x,t)^{-1}B(p')(x)h_+(x,t)$$

とおく。すると

$$\begin{aligned} F(x,0) &= h_-(x,0)^{-1}B(p')(x)h_+(x,0) \\ &= \lambda_-(x)^{-1}B(p')(x)\lambda_+(x) \\ &= B(p)(x) \\ F(x,1) &= h_-(x,1)^{-1}B(p')(x)h_+(x,1) \\ &= \lambda_-(x_0)^{-1}B(p')(x)\lambda_+(x_0) \end{aligned}$$

となる。

よって $B(p)$ は，写像 $x \mapsto \lambda_-(x_0)^{-1}B(p')(x)\lambda_+(x_0)$ とホモトピックである。次にこの写像と $B(p')$ を結ぶホモトピーを作る。仮定より G は弧状連結，よって $\left\{ \begin{array}{l} \lambda_-(x_0) \text{ と } e \\ \lambda_+(x_0) \text{ と } e \end{array} \right\}$

を結ぶ道 $\left\{\begin{array}{l} w_-:[0,1]\longrightarrow G \\ w_+:[0,1]\longrightarrow G \end{array}\right\}$ が存在する。ここで e は G の単位元である。 $(x,t)\in S^{n-1}\times[0,1]$ に対し

$$G(x,t)=w_-(t)^{-1}B(p')(x)w_+(t)$$

とおくと

$$\begin{aligned} G(x,0) &= F(x,1) \\ G(x,1) &= B(p')(x) \end{aligned}$$

故に, このふたつのホモトピーを併せて

$$B(p)\simeq B(p')$$

を得る。
十分条件($\Longleftarrow$): 逆に $B(p)$ と $B(p')$ がホモトピックであるとする。$x\in S^{n-1}$ に対し

$$L(x)=B(p')(x)^{-1}B(p)(x)$$

とおくと, $B(p)$ と $B(p')$ の間のホモトピーを用いて

$$L\simeq c_e$$

を与えるホモトピー

$$H:S^{n-1}\times[0,1]\longrightarrow G$$

を作ることができる。ここで c_e は, G の単位元 e への定値写像である。

$$H(S^{n-1}\times\{1\})=c_e(S^{n-1})=\{e\}$$

より, H は

$$\widetilde{H}:S^{n-1}\times[0,1]/S^{n-1}\times\{1\}\longrightarrow G$$

を誘導する。ところが, $S^{n-1}\times[0,1]/S^{n-1}\times\{1\}$ は S^n_+ と同相である。

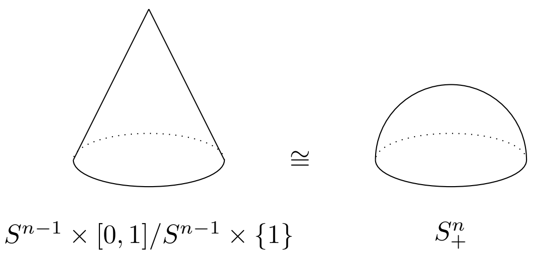


図 3.6: 円錐と半球の間の同相

よって $\widetilde{H}$ は写像

$$\lambda_+ : S^n_+ \longrightarrow G$$

とみなすことができる。また

$$\lambda_- = c_e : U_{-,\varepsilon} \longrightarrow G$$

とおく。$\overline{\Phi}^{+-}$ と $\overline{\Phi'}^{+-}$ を，それぞれ，E と E' の座標変換とすると $x \in S^n_+ \cap S^n_-$ に対し，

$$\begin{aligned}\lambda_-(x)^{-1}\overline{\Phi'}^{+-}(x)\lambda_+(x) &= e \cdot \overline{\Phi'}^{+-}(x)\widetilde{H}(x,1) \\ &= \overline{\Phi'}^{+-}(x)L(x) \\ &= B(p')(x)B(p')(x)^{-1}B(p)(x) \\ &= B(p)(x)\end{aligned}$$

となり，命題 3.4.6 により E は E' と同型になる。 □

演習問題 3.4.7. 上の定理で G が弧状連結でない場合を考察せよ。例えば S^1 上の被覆空間の場合はどうか。

上の証明で重要だったのは次のことである。

補題 3.4.8. 連続写像

$$f : X \longrightarrow Y$$

が定値写像 c_{y_0} にホモトピックであることと，f の拡張

$$\tilde{f} : X \times [0,1]/X \times \{1\} \longrightarrow Y$$

で $\tilde{f}([x,1]) = y_0$ であるものが存在することは同値である。ここで

$$X = X \times \{0\} \subset X \times [0,1]/X \times \{1\}$$

とみなしている。

これについては§3.6でより詳しくみる。

定義 3.4.9. 位相空間 X に対し $X \times [0,1]/X \times \{1\}$ を X の 錐 (*cone*) といい，CX で表わす。

演習問題 3.4.10. 任意の X に対し CX が可縮であることを示せ。

演習問題 3.4.11. CS^{n-1} が D^n と同相，よって S^n_+ と同相であることを示せ。

3.5 CW複体上のファイバー束の分類

前節では, D^n (より一般に可縮な空間) 及び S^n 上のファイバー束に ついて調べた。もっと一般に, ディスク をいくつか張り合わせてできた空間を考えよう。

定義 3.5.1. X を位相空間とする。X の**胞体分割** (*cell decomposition*) とは, 連続写像の族 $\{\varphi_\lambda : D^{n_\lambda} \to X\}_{\lambda\in\Lambda}$ で次の条件を満たすものである:

1. 各 λ に対し, 制限 $\varphi_\lambda : \mathrm{Int}D^{n_\lambda} \to X$ は中への同相である。
2. $e_\lambda = \varphi_\lambda(\mathrm{Int}D^{n_\lambda})$ とおくと $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda$ であり, 各 e_λ は互いに交わらない。
3. $e_\lambda = \varphi_\lambda(\mathrm{Int}D^n)$ のとき, $\dim e_\lambda = n$ と書くことにする。また非負の整数 r に対し

$$X^{(r)} = \bigcup_{\substack{\mu\in\Lambda \\ \dim e_\mu \leq r}} e_\mu$$

とおき, これを X の r-*skeleton* ということにする。 すると $\dim e_\lambda = n$ のとき

$$\varphi_\lambda(\partial D^n) = \varphi_\lambda(S^{n-1}) \subset X^{(n-1)}$$

が成り立つ。

胞体分割された Hausdorff空間を, **胞体複体**あるいは**胞複体** (*cell complex*) という。

写像達 $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ だけでなく, $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 或いは

$$X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda$$

という表示のことも胞体分割という。

各 e_λ を**胞体** (*cell*) といい, φ_λ を, e_λ の**特性写像** (*characteristic map*) という。n次元胞体を単にn**胞体** (n-*cell*) という。

例 3.5.2. 図 3.7 のように S^1 を分割する。 この分割により S^1 は胞体複体になる。

同様に分割

$$S^2 = e^0_+ \cup e^0_- \cup e^1_+ \cup e^1_- \cup e^2_+ \cup e^2_-$$

を図3.8のように定義すれば, S^2 は胞体複体になる。

一般に n次元球面 S^n は各次元に二個づつ胞体を持つ

$$S^n = e^0_+ \cup e^0_- \cup e^1_+ \cup e^1_- \cup \cdots \cup e^n_+ \cup e^n_-$$

という形の胞体分割を持つ。 □

演習問題 3.5.3. 上の S^n の胞体の特性写像を具体的に与え, 胞体分割であることを示せ。

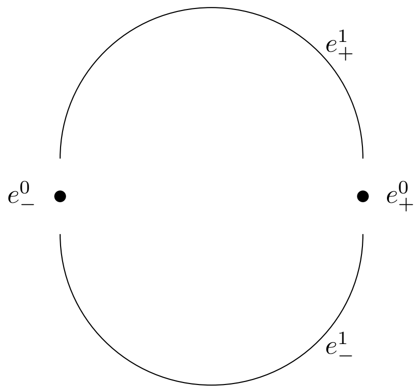


図 3.7: $S^1 = e^0_+ \cup e^0_- \cup e^1_+ \cup e^1_-$

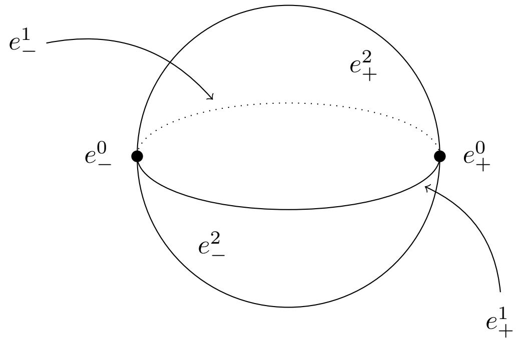


図 3.8: 球面の胞体分割

例 3.5.4. 例3.5.2の S^1 の分割に縦の直径を加えると胞体分割にならない。 その境界が, 0-skeleton に含まれないからである。 □

前節での S^n 上のファイバー束の分類は, 本質的に例 3.5.2 の胞体分割を用いていることに注意しよう。しかし, 球面の胞体分割が欲しいだけならもっと簡単なものがある。

例 3.5.5. e^0 を S^n の任意の点として, $e^n = S^n - \{e^0\}$ とおく。e^n は n次元の開ディスクと同相だから

$$S^n = e^0 \cup e^n$$

は S^n の胞体分割を与えている。

□

演習問題 3.5.6. e^0 を S^n の任意の点としたとき, $S^n - \{e^0\}$ が $\mathbb{R}^n$, よって $\mathrm{Int}(D^n)$ と同相であることを示せ。

いきなり胞体複体の定義を書いてしまったが, まずこの定義の幾何学的な意味を考えてみよう。 胞体分割の定義の三つの条件の内で, 最初の二つの条件は X がディスクの内部と

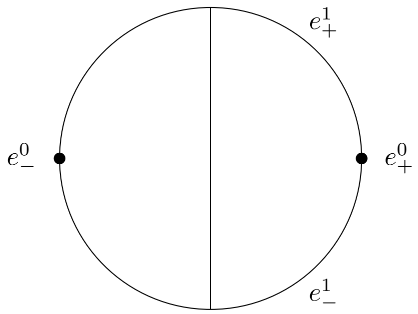


図 3.9: S^1 に縦棒

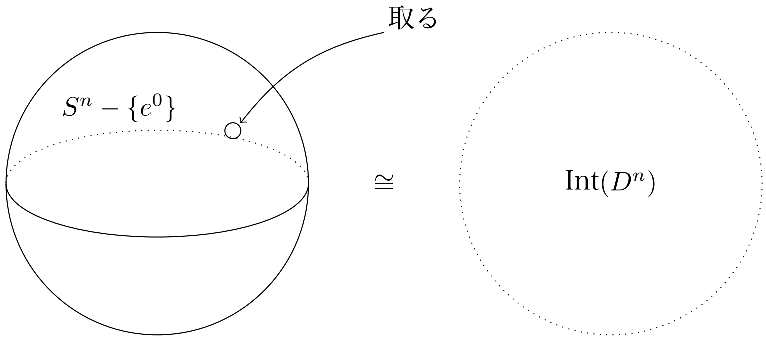


図 3.10: S^n の最小胞体分割

同相な部分に分割できるという意味である。では, 三番目の条件は何だろう。また胞体複体の定義に Hausdorff という条件が入っているのも不思議である。

Hausdorff であることの必要性については, 命題 3.5.12 の証明で説明するので, 胞体分割の定義の三番目の条件を考える。そのために, n胞体が一個で他の胞体は全て $(n-1)$次元以下である胞体複体 X を考えよう。 その n胞体を e^n とすると

$$X = X^{(n-1)} \cup e^n = X^{(n-1)} \cup \overline{e^n}$$

と書ける。つまり X は $(n-1)$-skeleton に e^n あるいは $\overline{e}^n$ を張り合わせたものであるが, その張り合わせ方を詳しく見てみることにする。

3の条件から e^n の特性写像 φ は

$$\varphi|_{S^{n-1}} : \partial D^n = S^{n-1} \longrightarrow X^{(n-1)}$$

という写像を与える。$\varphi(\mathrm{Int}(D^n)) = e^n$ は $X^{(n-1)}$ とは交わらないから, X は D^n の境界を $\varphi|_{S^{n-1}}$ で $X^{(n-1)}$ に貼り付けてできた空間とよく似ている。

今は n胞体が一個だけであると仮定したが, 他に n胞体があっても同じである。つまり3の条件があると, 胞体複体を 0胞体から始め, 帰納的に $(n-1)$-skeleton に n胞体を張り付

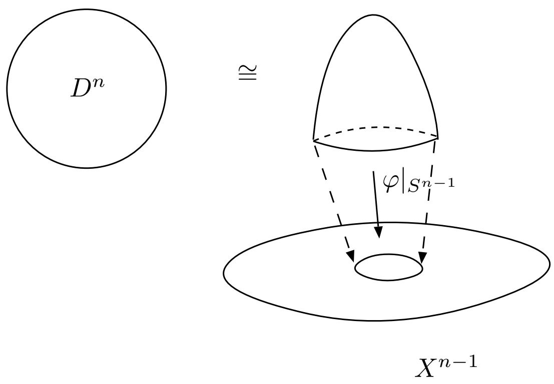


図 3.11: 胞体を1個貼り付ける

けてできた空間とみなすことができそうである。 もしそうなら, 胞体複体に関する命題の多くは, 次元についての帰納法で証明することができるため, 胞体複体は非常に有用な概念になる。

しかしながら, ここで問題は位相である。 これについて詳しく考えるために次の定義が必要になる。

定義 3.5.7. X と Y を位相空間とし, $A \subset Y$ を部分空間, そして $f : A \to X$を 連続写像とする。このとき f により Y を X に貼り付けた空間 $X \cup_f Y$ を

$$X \cup_f Y = (X \amalg Y)/\sim_f$$

で定義する。ここで $\sim_f$ は $a \in A$ に対し

$$a \sim_f f(a)$$

という関係で生成された同値関係である。$X \cup_f Y$ の位相はもちろん商位相 (等化位相) である。

例 3.5.8. X を一点 $*$ とし $Y = D^n$, $A = \partial D^n = S^{n-1}$ とする。 $f : S^{n-1} \to *$ を定値写像とすると

$$X \cup_f Y = * \cup_f D^n = D^n/\partial D^n$$

である。これがS^n と同相であることは, 次のように示すことができる。 例 3.5.5 の胞体分割の n 胞体の特性写像を

$$\varphi_n : D^n \longrightarrow S^n$$

とすると, $\varphi_n(\partial D^n) = e^0$ なので, 連続写像

$$\tilde{\varphi}_n : D^n/\partial D^n \longrightarrow S^n$$

が誘導される。特性写像に関する条件より，これは全単射になる。$D^n/\partial D^n$ がコンパクトで，S^n が Hausdorff なので，これは同相写像になる。 □

さて，X を胞体複体とし

$$X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda$$

をその胞体分割，

$$\varphi_\lambda : D^n \longrightarrow X$$

を胞体 e_λ の特性写像とするとき，この記号を用いると，問題は各 nに対し同相

$$X^{(n)} \cong X^{(n-1)} \cup_{\amalg\varphi_\lambda|_{S^{n-1}_\lambda}} \left(\coprod_{\dim e_\lambda = n} D^n_\lambda\right)$$

が得られるかどうかである。ここで D^n_λ は D^n のコピーである。 もちろん $X^{(n-1)}$ から $X^{(n)}$ への包含写像と各 n胞体の特性写像 φ_λ により well-defined で連続な全単射

$$X^{(n-1)} \cup_{\amalg\varphi_\lambda|_{S^{n-1}}} \left(\coprod_{\dim e_\lambda = n} D^n_\lambda\right) \longrightarrow X^{(n)}$$

が誘導される (これがwell-definedで連続で全単射であることは，読者各自確かめてもらいたい)。 このとき左の空間には商位相が入っていて，右の $X^{(n)}$ には X の部分空間としての位相が入っている。 上の写像が連続な全単射であるということは，左の空間の方が開集合がたくさんあるというだけであり，同相かどうかはわからないのである。

例 3.5.9. 任意の位相空間 X は 0胞体への胞体分割を持つ

$$X = \bigcup_{x\in X} \{x\}$$

これを，空集合に $\coprod_{x\in X} D^0_x$ を貼り合せたと考えたときの位相は，離散位相であり，一般には X と同相にはならない。 □

そこで胞体複体の位相にもう少し条件を付けたものを考える。

定義 3.5.10. 胞体複体

$$X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda$$

が，次の二つの条件を満たすとき*CW*複体 (*CW complex*) という。

(C) 任意の胞体 e_λ に対し，その閉包 $\overline{e}_\lambda$ と交わる胞体は有限個しかない。

(W) $A \subset X$ が X で閉であるための必要十分条件は，$A \cap \overline{e}_\lambda$ が全ての $\lambda \in \Lambda$ について $\overline{e}_\lambda$ で閉であること，つまり

$$A \subset X : \text{closed} \Longleftrightarrow A \cap \overline{e}_\lambda \text{が各 } \overline{e}_\lambda \text{ で閉}$$

である。

C は *closure finite*, W は *weak topology* の略である。

注意 3.5.11. このように条件を付けると, 対象となる空間が制限されてしまうように思えるが, 一般に幾何学に現れる多くの空間は, CW複体の構造を持つことが知られている。例えば, 微分幾何学での可微分多様体, 代数幾何学での ($\mathbb{C}$ 或いは $\mathbb{R}$ 上の) 代数多様体, 或いは解析空間などはいつでもCW複体と思って良い。 例えば, [LW33; Mil63; 横田一78] などを見よ。

期待通り, CW複体は $(n-1)$-skeleton に n胞体を張り付けてできたものになっている。

命題 3.5.12. *X をCW複体とし*

$$X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda$$

をその胞体分割,

$$\varphi_\lambda : D^n \longrightarrow X$$

を e_λ の特性写像とする。$n \geq 0$ に対し

$$\bar{p}_n : X^{(n-1)} \cup_{\amalg\varphi_\lambda|_{S^{n-1}}} \left(\coprod_{\dim e_\lambda = n} D^n_\lambda \right) \longrightarrow X^{(n)}$$

を $X^{(n-1)}$ の包含写像 とn胞体の特性写像から誘導される写像とすると, これは同相写像である。

証明. $\bar{p}_n$ が連続な全単射であることはわかっているので, 後は閉写像であることを示せばよい。

$$p : X^{(n-1)} \amalg \left(\coprod_{\dim e_\lambda = n} D^n_\lambda \right) \longrightarrow X^{(n-1)} \cup_{\amalg\varphi_\lambda|_{S^{n-1}}} \left(\coprod_{\dim e_\lambda = n} D^n_\lambda \right)$$

を等化写像とすると, 等化位相の定義より

$$A \subset X^{(n-1)} \cup_{\amalg\varphi_\lambda|_{S^{n-1}}} \left(\coprod_{\dim e_\lambda = n} D^n_\lambda \right) : \text{closed} \Longleftrightarrow p^{-1}(A) : \text{closed}$$

である。また

$$p^{-1}(A) = (X^{(n-1)} \cap A) \amalg \left(\coprod D^n_\lambda \cap p^{-1}(A) \right)$$

であるから, A が閉集合なら $X^{(n-1)} \cap A$ と各 $D^n_\lambda \cap p^{-1}(A)$ は閉集合である。このとき $\bar{p}_n(A)$ が $X^{(n)}$ の閉集合であることを言いたい。CW複体の条件 (W) から, $X^{(n)}$ の胞体, つまり X の n次元以下の胞体 e_μ に対し, $\bar{p}_n(A) \cap \bar{e}_\mu$ が $\bar{e}_\mu$ で閉集合であることを示せばよい。 ここで,

$$\bar{p}_n(A) \cap \bar{e}_\mu = \left(p_n(X^{(n-1)} \cap A) \cup \bigcup_\lambda p_n(D_\lambda \cap p^{-1}(A)) \right) \cap \bar{e}_\mu$$

である。 条件 (C) より $\bar{e}_\mu$ と交わる胞体の個数は有限個であることが保証されている。それを $e_{\lambda_1}, \ldots, e_{\lambda_k}$ とすると

$$\begin{aligned}\bar{p}_n(A) \cap \bar{e}_\mu &= \Big(p_n(X^{(n-1)} \cap A) \cup p_n(D^n_{\lambda_1} \cap p^{-1}(A)) \cup \cdots \cup p_n(D^n_{\lambda_k} \cap p^{-1}(A))\Big) \cap \bar{e}_\mu \\ &= \Big(p_n(X^{(n-1)} \cap A) \cup \varphi_{\lambda_1}(D^n_{\lambda_1} \cap p^{-1}(A)) \cup \cdots \cup \varphi_{\lambda_k}(D^n_{\lambda_k} \cap p^{-1}(A))\Big) \cap \bar{e}_\mu\end{aligned}$$

である。 p_n は $X^{(n-1)}$ に制限すると$X^{(n-1)}$への同相写像になるので, $p_n(X^{(n-1)} \cap A)$ は閉集合となる。後は, 各 $\varphi_{\lambda_i}(D^n_{\lambda_i} \cap p^{-1}(A))$ が閉集合であることが示されればよいが, それは次の補題より分かる。 よって $\bar{p}_n(A) \cap \bar{e}_\mu$ は閉集合となる。 □

補題 3.5.13. *CW複体 X の特性写像 $\varphi_\lambda : D^n \to \bar{e}_\lambda$ は閉写像である。*

証明. D^nはコンパクトであり, 胞体複体の定義より, X は Hausdorff である。 故に φ_λ は閉写像である。 □

注意 3.5.14. 上の証明からわかるように, 胞体複体の定義で Hausdorff という条件は, 特性写像

$$\varphi_\lambda : D^n \longrightarrow \bar{e}_\lambda$$

が閉写像, よって等化写像となるために必要である。

また, 証明からCW複体の (C) の条件も必要であることがわかるだろう。

演習問題 3.5.15. X がCW複体ならばその n-skeleton $X^{(n)}$ もCW複体であることを示せ。

演習問題 3.5.16. X がCW複体ならば $X^{(n)}$ は X の閉集合であることを示せ。

例 3.5.17. 例 3.5.2 と例 3.5.5 の胞体分割で S^n はCW複体になる。 □

より一般に次が成り立つ。

命題 3.5.18. *胞体の数が有限な胞体複体はCW複体である。*

演習問題 3.5.19. これを示せ。

あといくつか関連した言葉を定義しておく。

定義 3.5.20. X を胞体複体とするとき,

$$\dim X = \begin{cases} \max\{\dim e_\lambda | e_\lambda \subset X : \text{ cell}\}, & \max \text{ が存在すれば} \\ \infty, & \max\text{が存在しなければ} \end{cases}$$

と定義し X の次元という。

X の胞体の数が有限個の時, X を有限複体 (*finite complex*) という。

X の閉集合 $A \subset X$ が X の胞体の和集合で表されているとき, A は X の部分複体 (*subcomplex*) であるという。

これからCW複体上のファイバー束の分類について考えていくことにしよう。 定理2.6.7により, 主 G束についてのみ考えれば良い。 そこで次の記号を用意する。

定義 3.5.21. G を位相群とする。空間 X 上の主 G束の同型類全体の集合を $P_G(X)$ と書く。

この記号を使えば, 我々がこれからやりたいのは位相群 G とCW複体 X に対し $P_G(X)$ の構造を X のCW複体の構造 (cellの張り付き方) を用いて記述することである。そのために次のものを考える必要がある。

定義 3.5.22. X から Y への連続写像全体の集合 $\mathrm{Map}(X,Y)$ をホモトピックという同値関係 $\simeq$ (定義 3.3.1) で割ったものを $[X,Y]$ と書き X から Y へのホモトピー集合 (*homotopy set*) という。

これらの記号を用いると, 我々の目標とする結果は次のように述べられる。

定理 3.5.23 (分類定理). G を（ある条件を満たす）位相群とすると, 空間 BG と主 G束

$$p : EG \longrightarrow BG$$

が存在し, 任意の*CW*複体 X に対し $[f] \longmapsto f^*(EG)$ で与えられる対応,

$$B : [X,BG] \longrightarrow P_G(X)$$

は全単射である。つまり, 任意の X 上の主 G束

$$E \longrightarrow X$$

に対し, 写像

$$f : X \longrightarrow BG$$

で $f^*(EG) \cong E$ となるものが存在する。

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & f^*(EG) \arrow[r] & EG \arrow[d] \\ X \arrow[rr, "\exists f"] & & BG \end{tikzcd}$$

また f,g が共にそのような写像ならば, それらはホモトピック $f \simeq g$ である。

注意 3.5.24. 位相群 G についての条件は, 証明の中で明らかになるであろう。以下で 主 G束

$$p : EG \longrightarrow BG$$

の構成法を三種類説明するが, 位相群についての条件は, その構成法に依るのでここで書くわけにはいかないのである。 いずれにせよこの条件はあまり強くないので, たいていの位相群は満足する。

この定理の証明にはいろいろな道具が必要になるので, ここでいきなり証明を始めるわけにはいかない。まずは次節で, CW複体とホモトピー集合との関係を調べることにしよう。

3.6 CW複体とホモトピー

本節では, 後に必要になるCW複体のホモトピー論的な性質を述べる。

命題 3.5.12 で見たように, CW複体は様々な次元のディスクを張り合わせてできたものと考えられるが, ディスク自体は可縮なので, ホモトピー論的には何の情報も持っていない。 しかし, そのディスク達を張り合わせるときは, それぞれの胞体の特性写像を境界に制限した写像で張り合わせていた。 そこでディスクの境界 $\partial D^n = S^{n-1}$, つまり球面からの写像が重要になってくる。

定義 3.6.1. 空間 X が n連結 (n-*connected*) であるとは, 任意の $k \leq n$ に対し k次元球面から X へのホモトピー集合が一点からなること

$$[S^k, X] = \{*\}$$

と定義する。言い替えれば, $k \leq n$ なら任意のふたつの連続写像

$$f, g : S^k \longrightarrow X$$

がホモトピック $f \simeq g$ になることである。

0連結ということは別の言い方ができる。

補題 3.6.2. X が 0連結ということと, 弧状連結であるということは同値である。

証明. X が 0連結であるとする。任意の点 $x_0, x_1 \in X$ に対し写像

$$\begin{aligned} f &: S^0 \longrightarrow X \\ g &: S^0 \longrightarrow X \end{aligned}$$

を

$$\begin{aligned} f(1) &= x_0, \qquad f(-1) = x_0 \\ g(1) &= x_0, \qquad g(-1) = x_1 \end{aligned}$$

で定義する。ここで

$$S^0 = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 = 1 \right\} = \{1, -1\}$$

とみなしている。f も g も連続であるから, X が 0連結であるという仮定により f と g はホモトピックである。

$$H : S^0 \times [0,1] \longrightarrow X$$

を f と g のホモトピーとする。このホモトピーを使って

$$w(t) = H(-1, t)$$

とおけば

$$\begin{aligned} w(0) &= H(-1, 0) = f(-1) = x_0 \\ w(1) &= H(-1, 1) = g(-1) = x_1 \end{aligned}$$

なので w は x_0 と x_1 を結ぶ道になり, X が弧状連結であることが証明された。

逆は, 今の証明を逆にたどるだけなので読者の練習問題とする。 □

演習問題 3.6.3. 上の証明を完成させよ。つまり, X が弧状連結であると仮定して, 0連結であることを証明せよ。

ここで基点付き空間の概念を導入する。その理由の一つは, 次に定義する基点付きのホモトピー集合が, 多くの場合群, さらにはAbel群 (可換群) の構造を持つことである。単なる集合より, 群, さらにはAbel群の方がずっと扱い易いのである。

定義 3.6.4. **基点付き空間** (*based space*, *pointed space*) とは, 位相空間 X でその中の一点 $x_0 \in X$ が指定されているもののことである。これを組 (X, x_0) と考えても良い。x_0 を**基点** (*base point*) という。 基点をいちいち書くのは面倒なので, 基点付き空間のことも普通の空間のように, 単に X と書くことが多い。

$(X, x_0), (Y, y_0)$ が基点付き空間の時, (X, x_0) から (Y, y_0) への**基点を保つ写像** (*base point preserving map*, *pointed map*) とは, 連続写像

$$f : X \longrightarrow Y$$

で $f(x_0) = y_0$ となるもののことである。基点付き空間の間の写像は, 基点を保つものだけを考える。

$$\begin{aligned} f &: (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0) \\ g &: (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0) \end{aligned}$$

が基点を保つ写像の時, f と g の間の基点を保つホモトピーとは f と g の間のホモトピー

$$H : X \times [0, 1] \longrightarrow Y$$

で任意の $t \in [0, 1]$ に対し $H(x_0, t) = y_0$ であるものとする。 このときも普通のホモトピーと同じ記号で $f \simeq g$ と書く。

X から Y への基点を保つ写像全体の集合を $\mathrm{Map}((X, x_0), (Y, y_0))$ と書く。基点が明らかなときは, 基点を省略して $\mathrm{Map}_*(X, Y)$ と書く。 また, その基点を保つホモトピーによる

同値類の集合[4]を

$$[(X, x_0), (Y, y_0)]_* = [X, Y]_* = \mathrm{Map}_*(X, Y)/\simeq$$

と表わし, X から Y への**基点付きホモトピー集合** (*based homotopy set*) という。基点への定値写像, およびそのホモトピー類も $*$ で表わす。

基点付きのホモトピー集合の中で最も重要なのは $X = S^n$ の時であるので, これに名前を付ける。

定義 3.6.5. $e_0 = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ を基点とし, S^n を基点付き空間とみなす。基点付き空間 (X, x_0) に対し

$$\pi_n(X, x_0) = [(S^n, e_0), (X, x_0)]_*$$

とおく。後でみるように, $n \geq 1$ ならこれは群になるので, これを X の **n次ホモトピー群** (*homotopy group*) という。 基点が文脈から明らかな場合は省略し, $\pi_n(X)$ と書く。

ホモトピー群を用いると, 空間が n連結であるということは次のように述べられる。

命題 3.6.6. *(X, x_0) を弧状連結な基点付き空間とするとき, 次の三つの条件は同値である。*

1. *X が n連結, つまり $k \leq n$ に対し $[S^k, X] = \{*\}$ である。*
2. *$k \leq n$ に対し, $\pi_k(X, x_0) = \{*\}$ である。*
3. *$k \leq n$ なら, 任意の連続写像 $f : S^k \to X$ に対し $F|_{S^k} = f$ であるような連続写像*

$$F : D^{k+1} \longrightarrow X$$

が存在する。つまり, 任意の $f : S^k \to X$ は D^{k+1} からの写像に拡張できる。

証明のアイデアは補題 3.4.8と同じである。 基点に注意するだけである。

証明. (1) と (3) の同値性だけを証明する。 (2) と (3) の同値性は, 基点に気をつければほとんど同様に証明できるので, 練習問題とする。
<u>(1) $\Longrightarrow$ (3):</u>
$k \leq n$ とする。x_0 を X の基点として,

$$c_{x_0} : S^k \longrightarrow X$$

を x_0 への定値写像とする。X が n連結なので, 任意の写像

$$f : S^k \longrightarrow X$$

[4]つまり, $\mathrm{Map}_*(X, Y)$ を基点を保ってホモトピックという同値関係で「割った集合」

は c_{x_0} とホモトピックである。

$$H : S^k \times [0,1] \longrightarrow X$$

を c_{x_0} と f の間のホモトピーとする。

$$H(S^k \times \{0\}) = c_{x_0}(S^k) = \{x_0\}$$

よりHは

$$\tilde{H} : S^k \times [0,1]/S^k \times \{0\} \longrightarrow X$$

を誘導する。しかし演習問題 3.4.11 でみたように

$$S^k \times [0,1]/S^k \times \{0\} \cong D^{k+1}$$

と同一視され, $\tilde{H}$ を $F|_{S^k} = f$ である写像

$$F : D^{k+1} \longrightarrow X$$

と見なすことができる。

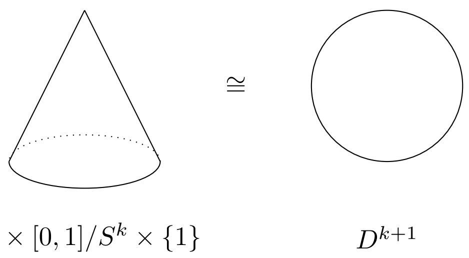


図 3.12: 円錐とディスクの間の同相

<u>(3) $\Longrightarrow$ (1)</u>: 任意の連続写像 $f, g : S^k \to X$ に対し, f と g の間のホモトピーを作ればよい。
f に対し

$$F : D^{k+1} \longrightarrow X$$

をその拡張とする。

$$p : S^k \times [0,1] \longrightarrow S^k \times [0,1]/S^k \times \{0\}$$

を射影とし, $H : S^k \times [0,1] \to X$ を次の合成で定義する。

$$S^k \times [0,1] \xrightarrow{p} S^k \times [0,1]/S^k \times \{0\} \cong D^{k+1} \xrightarrow{F} X$$

すると $x \in S^k$ に対し,

$$\begin{aligned} H(x,0) &= F(0) \\ H(x,1) &= F|_{S^k}(x) = f(x) \end{aligned}$$

である。特に $H(x,0)$ は定値写像である。 $x_0 = F(0)$ とおくと, H は f と定値写像 c_{x_0} の間のホモトピーを与える。

同様に g に対しても, g とある定値写像 c_{x_1} との間のホモトピー G ができる。

ここで, $h : S^0 \to X$ を

$$\begin{aligned} h(1) &= x_0 \\ h(-1) &= x_1 \end{aligned}$$

で定義し, その拡張を

$$\tilde{h} : D^1 = [0,1] \longrightarrow X$$

とする。この $\tilde{h}$ により c_{x_0} と c_{x_1} の間のホモトピーが得られ, H と G と繋げれば f と g の間のホモトピーができる。 □

演習問題 3.6.7. e_0 を S^n の基点とするとき,

$$S^n \times [0,1]/S^n \times \{0\} \cup \{e_0\} \times [0,1] \cong D^{n+1}$$

を示し, (2) と (3) が同値であることを証明せよ。

定義 3.6.8. 基点付き空間 (X, x_0) に対し

$$X \times [0,1]/(X \times \{1\} \cup \{x_0\} \times [0,1])$$

を X の約錐 (*reduced cone*) という。 これも錐と同じ記号 CX で表わすことにする。

演習問題 3.6.9. 任意の基点付き空間 X に対し, その約錐は基点を保って可縮であることを示せ。

さて上に述べたように, 基点付き空間を考える理由の一つは, $n \geq 1$ に対し $\pi_n(X, x_0)$ が群の構造を持つことである。ここで, その群の構造を定義しよう。 まず次の定義が必要になる。

定義 3.6.10. X と Y を基点付きの空間とする。X と Y のウェッジ和 (*wedge*) とは, X と Y を基点でくっつけた空間のことであり, $X \vee Y$ と書く。 より正確には, x_0, y_0 をそれぞれ X, Y の基点としたとき, $X \times Y$ の部分空間として

$$X \vee Y = X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y \subset X \times Y$$

と定義されるものである。

定義 3.6.11. $k \geq 1$ の時

$$\mathrm{pinch} : S^k \longrightarrow S^k \vee S^k$$

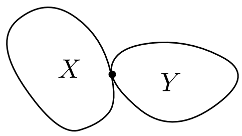


図 3.13: ウェッジ和

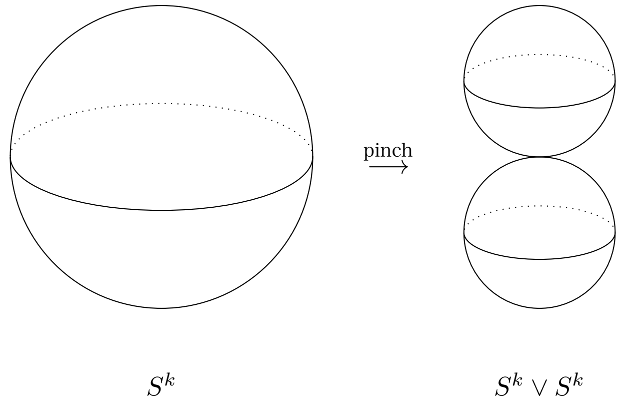


図 3.14: 赤道をつぶす写像

を, 赤道をつぶす (pinch) ことによって得られる写像とする。ただし, 赤道とは

$$E = \left\{ (x_0, \dots, x_k) \in S^k \,\middle|\, x_k = 0 \right\}$$

で定義される S^k の部分空間である。

また, 基点付き空間 X に対し

$$\mathrm{fold} : X \vee X \longrightarrow X$$

を各 X 上で恒等写像である写像とする。つまり,

$$\mathrm{fold}(x, x') = \begin{cases} x, & \text{if } x' = x_0 \\ x', & \text{if } x = x_0 \end{cases}$$

で定義される写像である。

これは X の基点を中心にして折り畳む写像 (folding map) である。

この二つの写像を用いて, 基点を保つ写像 $f, g : S^k \to X$ に対し,

$$f + g : S^k \longrightarrow X$$

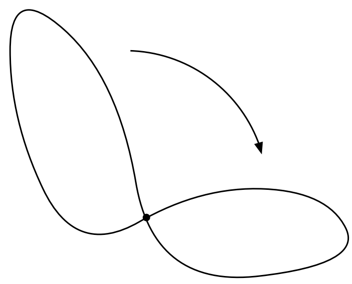


図 3.15: 折り畳む写像

を

$$S^k \xrightarrow{\text{pinch}} S^k \vee S^k \xrightarrow{f \vee g} X \vee X \xrightarrow{\text{fold}} X$$

の合成で定義する。

演習問題 3.6.12. S^k の赤道を一点に潰した空間と $S^k \vee S^k$ が同相であることを示せ。

この「+」の定義は少し曖昧である。例えば, 写像 pinch は絵で説明されているだけで, 具体的な定義は何も与えられていない。実際, 普通のトポロジーの教科書に書いてあるものは, 多くの場合これとは異なったものである。それを述べるためには, 位相空間対の概念が必要になる。

定義 3.6.13. 位相空間 X とその部分空間 A の組 (X, A) を**位相空間対** (*pair of topological spaces*) という。(Y, B) も位相空間対とする。 連続写像 $f : X \to Y$ が $f(A) \subset B$ をみたすとき, f を位相空間対の間の写像といい

$$f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$$

と表わす。$g : (X, A) \to (Y, B)$ も位相空間対の写像のとき, f から g へのホモトピーとは, 通常の意味の f から g へのホモトピー

$$H : X \times [0, 1] \longrightarrow Y$$

で, 任意の $a \in A$ と $t \in [0, 1]$ に対し $H(a, t) \in B$ をみたすものとする。

(X, A) から (Y, B) への位相空間対の写像全体の集合を $\mathrm{Map}((X, A), (Y, B))$ と書き, その (位相空間対の) ホモトピー類の集合を $[(X, A), (Y, B)]$ と表わす。これを位相空間対のホモトピー集合という。

注意 3.6.14. A と B が共に1点の場合が, 基点付きホモトピー集合である。

補題 3.6.15. 基点付き位相空間 (X, x_0) に対し, 自然な全単射

$$[([0,1]^n, \partial[0,1]^n), (X, x_0)] \cong \pi_n(X, x_0)$$

がある。

証明には次の同相が本質的である。

演習問題 3.6.16. $\mathbb{R}^n$ の一点コンパクト化を $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ で表わす。 写像 $\tau : [0,1]^n/\partial[0,1]^n \to \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ を

$$\tau([x_1, \ldots, x_n]) = \begin{cases} \left(\tan \frac{2\pi x_1 - 1}{2}, \ldots, \tan \frac{2\pi x_n - 1}{2}\right), & \text{if } (x_1, \ldots, x_n) \not\in \partial[0,1]^n \\ \infty, \text{ if } (x_1, \ldots, x_n) \in \partial[0,1]^n \end{cases}$$

で定義すると, これは同相写像であることを示せ。

補題 3.6.15 の証明. まず写像

$$\pi : \mathrm{Map}\left(([0,1]^n, \partial[0,1]^n), (X, x_0)\right) \longrightarrow \mathrm{Map}_*(S^n, X)$$

を定義しよう。$f : ([0,1]^n, \partial[0,1]^n) \to (X, x_0)$ に対し, $f(\partial[0,1]^n) = \{x_0\}$ なので,

$$\bar{f} : [0,1]^n/\partial[0,1]^n \longrightarrow X$$

が誘導される。 ここで, 演習問題 3.5.6 から同相 $S^n \cong \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ が得られることに注意する。 この同相写像と演習問題 3.6.16 の同相写像を合成すると同相 $S^n \cong [0,1]^n/\partial[0,1]^n$ が得られる。これと $\bar{f}$ を合成したものを $\pi(f) : S^n \to X$ と定義すると, これは基点を保つ写像である。この構成により, 位相空間対のホモトピーが基点を保つホモトピーを誘導することはすぐに分かる。 よって, 写像

$$\pi : [([0,1]^n, \partial[0,1]^n), (X, x_0)] \longrightarrow \pi_n(X, x_0)$$

が得られた。

基点を保つ写像, $f : S^n \to X$ に対し, 合成 $[0,1]^n \to [0,1]^n/\partial[0,1]^n \cong S^n \xrightarrow{f} X$ は位相空間対の写像 $([0,1]^n, \partial[0,1]^n) \to (X, x_0)$ を定めるので, π は全射になる。 単射を示すために, $[f], [g] \in [([0,1]^n, \partial[0,1]^n), (X, x_0)]$ を取る。$\pi([f]) = \pi([g])$ と仮定すると, $\bar{f}$ と $\bar{g}$ は基点を保ってホモトピックになる。そのホモトピーを H とする。合成

$$[0,1]^n \to [0,1]^n/\partial[0,1]^n \xrightarrow{H} X$$

は, f と g の間の位相空間対のホモトピーになり, $[f] = [g]$ を得る。 □

注意 3.6.17. 命題の主張で用いた「自然な」というのは数学用語である。この場合, 次を意味する: $h:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ を基点を保つ連続写像としたとき, 次の図式が可換になる

$$\begin{tikzcd}
[([0,1]^n,\partial[0,1]^n),(X,x_0)] \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "h_*"'] & \pi_n(X,x_0) \arrow[d, "h_*"] \\
[([0,1]^n,\partial[0,1]^n),(X,x_0)] \arrow[r, "\pi"'] & \pi_n(Y,y_0)
\end{tikzcd}$$

ここで用いた二つの h_* は h から「誘導された」写像である。 正確には, 定義 3.8.1 で述べる。

補題 3.6.18. *補題 3.6.15 の同一視の下で,* $\pi_n(X,x_0)$ *での演算* $+$ *は次のように表わすことができる:* $f,g:([0,1]^n,\partial[0,1]^n)\to(X,x_0)$ *に対し*

$$(f+g)(t_1,\ldots,t_n)=\begin{cases} f(t_1,\ldots,t_{n-1},2t_n), & 0\le t_n\le \frac{1}{2} \\ g(t_1,\ldots,t_{n-1},2t_n-1), & \frac{1}{2}\le t_n\le 1 \end{cases}$$

である。

証明. 補題 3.6.15 の証明で用いた同相写像を

$$\varphi:[0,1]^n/\partial[0,1]^n \xrightarrow{\cong} S^n$$

とすると,

$$\varphi([t_1,\ldots,t_n])=\begin{cases} \left(\frac{\sum_{i=1}^n \tan^2\frac{2\pi t_i-\pi}{2}-1}{\sum_{i=1}^n \tan^2\frac{2\pi t_i-\pi}{2}+1}, \frac{2\tan\frac{2\pi t_1-\pi}{2}}{\sum_{i=1}^n \tan^2\frac{2\pi t_i-\pi}{2}+1}, \ldots, \frac{2\tan\frac{2\pi t_n-\pi}{2}}{\sum_{i=1}^n \tan^2\frac{2\pi t_i-\pi}{2}+1}\right), & \text{if } (t_1,\ldots,t_n)\notin\partial[0 \\ e_0, & \text{if } (t_1,\ldots,t_n)\in\partial[0 \end{cases}$$

である。一方, 写像 pinch は

$$\mathrm{pinch}(x_0,\ldots,x_n)=\begin{cases} ((x_0,\ldots,x_{n-1},1-2x_n),e_0), & \text{if } 0\le x_n\le 1 \\ (e_0,(x_0,\ldots,x_{n-1},2x_n+1)), & \text{if } -1\le x_n\le 0 \end{cases}$$

で与えられる。 □

補題 3.6.19. $k\ge 1$ *なら* $+$ *は well-defined な写像*

$$+:\pi_k(X)\times\pi_k(X)\longrightarrow\pi_k(X)$$

を定める。つまり $f_0,f_1,g_0,g_1:S^k\to X$ *に対し,*

$$f_0\simeq f_1,\ g_0\simeq g_1 \Longrightarrow f_0+g_0\simeq f_1+g_1$$

となる。またこの演算により, $k\ge 1$ *なら* $\pi_k(X,x_0)$ *は群になり, その単位元は基点への定値写像*

$$*:S^k\longrightarrow X$$

のホモトピー類である。

注意 3.6.20. 次の補題より $k \geq 2$ なら $\pi_k(X, x_0)$ は Abel群になるので, その単位元を 0 で表す。

演習問題 3.6.21. この補題を証明せよ。(大抵の代数的トポロジーの入門書には詳しい証明が載っているはずであるが, ホモトピー群の演算の定義は異なると思う。)

補題 3.6.22. *$k \geq 2$ なら $\pi_k(X)$ はAbel群になる。*

証明. 基点付き写像
$$f, g : S^k \longrightarrow X$$
に対し, $f+g$ と $g+f$ の間のホモトピーを作りたい。$t \in [0,1]$ に対し
$$F_t : S^k \longrightarrow S^k$$
を, S^k の基点 e_0 とその原点について対称な点 $-e_0$ を結ぶ直線 ℓ の周りの, 角 πt の回転とする。t を動かすことにより,
$$F : S^k \times [0,1] \longrightarrow S^k$$
を得る。これは, 恒等写像 1_{S^k} と直線 ℓ を軸とする角 π の回転の間のホモトピーである。そこで, 合成
$$H : S^k \times [0,1] \xrightarrow{F} S^k \xrightarrow{f+g} X$$
を考えると
$$\begin{aligned} H|_{S^k \times \{0\}} &= f+g \\ H|_{S^k \times \{1\}} &= g+f \end{aligned}$$
よって H は $f+g$ と $g+f$ の間のホモトピーを与える。 □

CW複体とホモトピーの関係で最も有用なものの一つが次の胞体近似定理である。

定理 3.6.23 (胞体近似定理)**.** *X と Y をCW複体とすると, 任意の連続写像 $f : X \to Y$ に対し, 次の二つの条件を満足する写像*
$$g : X \longrightarrow Y$$
が存在する:

1. *g は X の n次元胞体を Y の n次元以下の胞体にうつす。つまり $g(X^{(n)}) \subset Y^{(n)}$ である。*
2. *$f \simeq g$*

つまり, CW複体の間の任意の連続写像は, 胞体の次元を保つような写像で「ホモトピーの意味で」近似できる。

証明. 省略。興味のある読者は, 代数的トポロジーの教科書を見られたい。 Fomenko と Fuks と Gutenmacher の本 [FFG89] には 比較的短く幾何学的直感に訴える証明が載っている。 □

定義 3.6.24. X, Y をCW複体とし,

$$f : X \longrightarrow Y$$

を連続写像とする。

任意の $n \geq 0$ に対し

$$f(X^{(n)}) \subset Y^{(n)}$$

をみたすとき f を胞体写像 (*cellular map*) という。

注意 3.6.25. この定義を用いると, 上の定理は「CW複体の間の連続写像はいつでも胞体写像とホモトピックである」と述べられる。

この定理の系として, 球面のホモトピー群の次元の小さい部分がわかる。

系 3.6.26. S^n は $(n-1)$連結, つまり $k \leq n-1$ に対し $\pi_k(S^n) = 0$ である。

証明. $k \leq n-1$ とし $f : S^k \to S^n$ を連続写像とする。S^k も S^n もCW複体であり, 例 3.5.5 により, S^n は

$$S^n = \{*\} \cup (S^n - \{*\}) = e^0 \cup e^n$$

という胞体分割を持つ。胞体近似定理により, $f \simeq g$ である胞体写像

$$g : S^k \longrightarrow S^n$$

が存在する。しかし, $k \leq n-1$ より,

$$\begin{aligned} g(S^k \text{ の } k\text{次元以下の胞体}) &= g(S^k) \\ &\subset S^n \text{ の } k\text{次元以下の胞体} \\ &= e^0 = \{*\} \end{aligned}$$

だから g は定値写像である。故に, 任意の写像 $f : S^k \to S^n$ は定値写像にホモトピックであることが示された。 □

CW複体には, 被覆ホモトピー定理 (定理 3.3.16) が次のように一般化できる。

定理 3.6.27 (被覆ホモトピー拡張定理). X を*CW*複体とし A をその部分複体とする。$p : E \to Y$ をファイバー束,

$$\begin{aligned} f &: X \longrightarrow Y \\ \tilde{f} &: X \longrightarrow E \end{aligned}$$

を連続写像で

$$
\begin{tikzcd}
 & E \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}
$$

を可換にするものとする。更に

$$H : X \times [0,1] \longrightarrow Y$$

を f から始まるホモトピー, つまり $H(x,0) = f(x)$ であるものとし,

$$G : A \times [0,1] \longrightarrow E$$

を $G|_{A\times\{0\}} = \tilde{f}|_A$ であり

$$
\begin{tikzcd}
A \times [0,1] \arrow[r, "G"] \arrow[d, "\cap"'] & E \arrow[d, "p"] \\
X \times [0,1] \arrow[r, "H"] & Y
\end{tikzcd}
$$

を可換にするものとする。

このとき, ホモトピー

$$\widetilde{H} : X \times [0,1] \longrightarrow E$$

で, 次の図式の三角を全てを可換にするものが存在する。

$$
\begin{tikzcd}
 & A \times [0,1] \arrow[dd] \arrow[dr, "G"] & & \\
X \times \{0\} \arrow[rr] \arrow[dr] & & E \arrow[dr, "p"] & \\
 & X \times [0,1] \arrow[ur, dotted, "\widetilde{H}"] \arrow[rr, "H"] & & Y
\end{tikzcd}
$$

つまり, 被覆ホモトピー定理で, 部分複体上であらかじめホモトピーのリフトが与えられているならば, $\widetilde{H} : X \times [0,1] \to E$ として, そのホモトピーの拡張になっているものが取れるということである。

注意 3.6.28. 上の図式は次のように描いてもよい。

$$
\begin{tikzcd}
X \times \{0\} \cup A \times [0,1] \arrow[r, "\tilde{f} \cup G"] \arrow[d, "\cap"'] & E \arrow[d, "p"] \\
X \times [0,1] \arrow[r, "H"] & Y
\end{tikzcd}
$$

この方が被覆ホモトピー定理との類似が分りやすいかもしれない。

証明. 定理 3.3.5 とほとんど同じ証明なので省略する。 与えられた $G : A \times [0,1] \to E$ から出発して, これを順番に胞体上に拡張していけば良い。定理 3.3.5 の証明では, X がパラコンパクト Hausdorff であることを使って X を小さな部分に切り刻んだが, 今の場合は X はCW複体なので, 元々小さい部分 (cell) に分割されている。 このことを使えば証明はもっと容易である。 □

定理 3.6.27の特別の場合として次の結果がある。

系 3.6.29 (基点付き被覆ホモトピー定理). X を基点付きCW複体, Y を基点付き空間とする。$p : E \to Y$ をファイバー束,

$$\begin{aligned} f &: X \longrightarrow Y \\ \tilde{f} &: X \longrightarrow E \end{aligned}$$

を基点を保つ連続写像で

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

を可換にするものとする。更に $H : X \times [0,1] \to Y$ を f から始まる基点を保つホモトピー, つまり $x \in X$, $t \in [0,1]$ に対し,

$$\begin{aligned} H(x,0) &= f(x) \\ H(*,t) &= * \end{aligned}$$

であるものとする。

すると基点を保つホモトピー

$$\widetilde{H} : X \times [0,1] \longrightarrow E$$

で $\widetilde{H}(x,0) = \tilde{f}(x)$ かつ

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \times [0,1] \arrow[ur, "\widetilde{H}"] \arrow[r, "H"'] & Y \end{tikzcd}$$

を可換にするものが存在する。

証明. 定理 3.6.27 で $A = \{*\}$ とすれば良い。 □

3.7 分類定理の証明の前半

これまでの準備を元にして, ファイバー束の分類定理 (定理 3.5.23) の証明にとりかかろう。 定理の内容から証明は次の二つの部分に分かれる。

- 主 G束 $EG \to BG$ の構成
- 対応
$$B : [X, BG] \longrightarrow P_G(X)$$
が全単射であることの証明

主 G 束 $EG \to BG$ の構成は, G によって様々な構成法があるので, 後で詳しく見ることにする。この節では, 一般の主 G 束

$$p : E \longrightarrow B$$

に対し, プルバックを取るという対応

$$[X, B] \longrightarrow P_G(X)$$

が全射そして単射になる条件を調べよう。 全射になるための条件は次の通りである。

命題 3.7.1. G を位相群とし, $E \to B$ を E が $(n-1)$連結な主 G 束とする。もし X が $\dim X < n$ であるCW複体なら, $f \mapsto f^*(E)$ で与えられる対応

$$[X, B] \longrightarrow P_G(X)$$

は全射である。

証明. 以下証明の概略を述べる。読者は自ら細部を確認してもらいたい。

$E' \to X$ を X 上の主 G 束とする。連続写像

$$f : X \longrightarrow B$$

で $f^*(E) \cong E'$ であるものを見つけたい。X の skeleton の上に順番に f を構成していこう。具体的には, 各 $r = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ に対し,

$$i_r : X^{(r)} \hookrightarrow X$$

を包含写像としたとき, 連続写像

$$f_r : X^{(r)} \longrightarrow B$$

とファイバー束の同型

$$\tilde{f}_r : i_r^*(E') \xrightarrow{\cong} f_r^*(E) \tag{3.8}$$

で

$$\begin{array}{ccc} X^{(r-1)} & \xrightarrow{f_{r-1}} & B \\ {\scriptstyle i_r^{r-1}}\downarrow & & \| \\ X^{(r)} & \xrightarrow{f_r} & B \end{array}$$

が可換になるものを r についての帰納法で構成したい。 命題 3.2.5 より, f_r を cover する束写像

$$\tilde{f}_r : i_r^*(E') \longrightarrow E$$

を構成すれば, 同型 (3.8) が得られることに注意する。

まず $r = 0$ の時。X の 0-skeleton $X^{(0)}$ は, X の 0-cell の集まりであるが, 0-cell は一点なので $X^{(0)}$ は「バラバラの点の集まり」, つまりいくつかの点の disjoint union である[5]。 また各 0-cell 上のファイバー束は自明なので, $X^{(0)}$ 上のファイバー束は全て自明である。よって f_0 として任意の写像を取れば,

$$f_0^*(E) \cong X^{(0)} \times G \cong i_0^*(E')$$

となり条件は満たされる。

帰納法により, $\tilde{f}_{r-1}$ まで構成されたとする。 命題 3.5.12 により

$$X^{(r)} = X^{(r-1)} \cup (r\text{次元胞体})$$

と考えられるので, 各 r次元胞体上で $\tilde{f}_r$ を作り $\tilde{f}_{r-1}$ と張り合わせれば良い。e^r を X の r次元胞体の一つとし

$$\varphi : D^r \longrightarrow X$$

を e^r の特性写像とする。ここで D^r は可縮なので定理 3.4.3 より $\varphi^*(E')$ は自明である。

$$\varphi^*(E') \cong D^r \times G$$

よって $j : S^{r-1} \hookrightarrow D^r$ を包含写像とするとき

$$j^*\varphi^*(E') = (\varphi \circ j)^*(E') \cong S^{r-1} \times G$$

となる。次の図式

$$\begin{array}{ccccccccc} S^{r-1} \times G & \cong & j^*\varphi^*(E') & \longrightarrow & i_{r-1}^*(E') & \cong & f_{r-1}^*(E) & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S^{r-1} & = & S^{r-1} & \xrightarrow{\varphi\circ j} & X^{(r-1)} & = & X^{(r-1)} & \xrightarrow{f_{r-1}} & B \end{array}$$

で縦の写像は全てファイバー束の射影で横の写像は全て束写像である。 上段の写像を全て合成したものを

$$\tilde{f}_{r-1} : S^{r-1} \times G \longrightarrow E$$

[5]下の演習問題 3.7.2を見よ。

とおくとこれも束写像である。そこで

$$h : S^{r-1} \longrightarrow E$$

を $h(x) = \tilde{f}_{r-1}(x, e)$ で定義する, ここで $e \in G$ は単位元である。仮定より E は $(n-1)$連結で, 今 $r < n$ なので, 命題 3.6.6 により, h は

$$\tilde{h} : D^r \longrightarrow E$$

に拡張される。また $p : E \to B$ は主 G束だから G の E への作用

$$\mu : E \times G \longrightarrow E$$

がある。これを用いて写像

$$\tilde{F} : D^r \times G \longrightarrow E$$

を $\tilde{F}(x, g) = \mu(\tilde{h}(x), g)$ で定義し

$$F : D^r \longrightarrow B$$

を $F(x) = p \circ \tilde{F}(x, e)$ で定義すれば, 次の図式が可換になる。

$$\begin{array}{ccc} D^r \times G & \xrightarrow{\tilde{F}} & E \\ \big\downarrow & & \big\downarrow p \\ D^r & \xrightarrow{F} & B \end{array}$$

つまりこれは束写像である。そこで

$$f_r : X^{(r)} \longrightarrow B$$

を各 r胞体 e^r に対しては, 各 $x \in \overline{e^r}$ に対し $x = \varphi(y)$ となる点 $y \in D^r$ をとり,

$$f_r(x) = F(y)$$

で, また $X^{(r-1)}$ 上では f_{r-1} で定義する。$\tilde{h}$ は h の D^r 上への拡張だったので, F は S^{r-1} 上では f_{r-1} と一致し, y の取り方に依らないことがわかる。よって well-definedな連続写像

$$f_r : X^{(r)} \longrightarrow B$$

が得られた。また命題 3.1.8 を用いれば, 同様にして $\tilde{F}$ から f_r を被覆する束写像

$$i_r^*(E') \longrightarrow E$$

が得られ

$$i_r^*(E') \cong f_r^*(E)$$

となる。最後に, $f = f_{n-1}$ とおくと

$$f^*(E) = f_{n-1}^*(E) \cong i_{n-1}^*(E') = E'$$

となり, 対応 $f \mapsto f^*(E)$ が全射

$$[X, B] \longrightarrow P_G(X)$$

を与えることが証明された。 □

演習問題 3.7.2. X を CW複体とするとき, $X^{(0)}$ は X の部分空間として離散位相を持つことを証明せよ。

次に

$$[X, B] \longrightarrow P_G(X)$$

が単射になる条件を考える。つまり, $f^*(E) \cong g^*(E)$ ならば $f \simeq g$ となる条件である。よってホモトピー

$$H : X \times [0, 1] \longrightarrow B$$

を作るわけであるが, $X \times [0, 1]$ が CW複体になっていれば, 命題 3.7.1 の証明と同様にできそうである。

$[0, 1] = \{0\} \cup (0, 1) \cup \{1\}$ として $[0, 1]$ は1次元のCW複体となるので, まず, 一般に2つのCW複体の直積がCW複体になるための条件を考えよう。

命題 3.7.3. 胞体複体 X と Y の直積 $X \times Y$ は, 胞体複体の構造を持つ。 更に, X と Y が閉包有限性を持つならば, $X \times Y$ も閉包有限になる。

証明. □

問題は弱位相である。弱位相と直積位相はあまり相性が良くない。 有限性が必要になる。

定義 3.7.4. 胞体複体 X が局所有限 (*locally finite*) であるとは,

定理 3.7.5. X と Y を*CW*複体とする。もし X が局所有限ならば, $X \times Y$ は*CW*複体になる。

証明. トポロジーの教科書, 例えば [小中菅67] を参照のこと。 □

命題 3.7.6. G を位相群とし $p : E \to B$ を E が n連結な主 G束とする。もし X が $\dim X < n$ である *CW*複体なら, $f \mapsto f^*(E)$ で与えられる対応

$$[X, B] \longrightarrow P_G(X)$$

は単射である。

証明. 命題 3.7.1 の証明と同様である。 ここでも細部のチェックは読者に任せることにする。

写像 $f, g : X \to B$ に対し $f^*(E) \cong g^*(E)$ であると仮定する。 f と g の間のホモトピー

$$H : X \times [0,1] \longrightarrow B$$

を構成したい。$E' = f^*(E)$ とおくと

$$f^*(p) \times 1_{[0,1]} : E' \times [0,1] \longrightarrow X \times [0,1]$$

は $X \times \{0\}$ 上で $f^*(E)$, $X \times \{1\}$ 上で $g^*(E)$ に同型な $X \times [0,1]$ 上の主 G束である。ところが $\dim X < n$ であるという仮定から, $X \times [0,1]$ は $\dim X \times [0,1] < n+1$ である CW複体である。 今 E が n連結と仮定しているから, 命題 3.7.1 の証明と同様にして

$$H : X \times [0,1] \longrightarrow B$$

で $H^*(E) \cong E' \times [0,1]$ であるものが構成できる。ただし, 今回は

$$f \amalg g : X \times \{0\} \amalg X \times \{1\} \longrightarrow B$$

から出発してこれを拡張することによって H が作れる。ゆえに H は f と g の間のホモトピーである。 □

上の二つの命題より, 分類定理の証明のためには, 全空間の連結性が高い主束が重要であることが分かる。 そこで, 例によってそういうファイバー束に名前を付ける。

定義 3.7.7. G を位相群とする。主 G束

$$E \longrightarrow B$$

が n**普遍** (n-*universal*) であるとは, 全空間 E が $(n-1)$連結であることと定義する。

∞普遍な主 G束, つまり全ての n について n普遍である主 G束のことを単に**普遍** G**束** (*universal* G-*bundle*) という。

命題 3.7.1 と 命題 3.7.6 により, 分類定理の証明のためには, あと普遍 G束を構成するだけで良いことが分かった。 普遍 G束を構成する際に一番問題なのが, どうやって全空間のホモトピー群が消えていることを証明するかである。 ホモトピー群を計算するための道具が何か必要である。

次節では, ファイバー束に対しホモトピー群の長い完全列というものがあることを証明し, この道具を用いて, §3.9 で「普通に現れる」コンパクト群 G に対する主 G束の分類定理の証明を完成させる。 最後に, §3.10で, より一般的な普遍 G束の構成である, Milnor と Milgram の構成法を紹介する。

3.8 ファイバー束とホモトピー群

本節ではファイバー束

$$p : E \longrightarrow B$$

に対し, 全空間 E, 底空間 B, そしてファイバー F のホモトピー群の関係を調べる。 本章の最初に書いたように, 一般に現代数学で二つのものを比べるときにはそれらの間の写像を用いる。 今の場合, E と B のホモトピー群を比べるのには写像 $p : E \to B$ を用いるのが自然である。 この写像からホモトピー群の間の写像を作りたい。 しかし, より一般に次の定義がある。

定義 3.8.1. $f : X \to Y$ を基点付き空間の写像とする。このとき, ホモトピー群の間の写像

$$f_* : \pi_k(X) \longrightarrow \pi_k(Y)$$

を $[g] \in \pi_k(X)$ に対し $f_*([g]) = [f \circ g]$ で定義する。ここで $[g]$ は写像 $g : S^k \to X$ のホモトピー類である。次の演習問題より, これは群の準同形になるので, f_* を f により**誘導された準同形** (*induced homomorphism*) という。

演習問題 3.8.2. 上の定義で, $k \geq 1$ なら f_* は群の準同型になることを示せ。 また基点付き連続写像

$$\begin{aligned} f &: X \longrightarrow Y \\ g &: Y \longrightarrow Z \end{aligned}$$

に対し

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

であることと, 恒等写像 $1_X : X \to X$ に対し

$$(1_X)_* = 1_{\pi_k(X)}$$

であることを示せ。

これで $\pi_k(E)$ と $\pi_k(B)$ を比べる写像

$$p_* : \pi_k(E) \longrightarrow \pi_k(B)$$

ができた。ここで, 二つの群を準同型により比べるということがどういうことか思い出すために, 線形代数を少し復習する。V と W を有限次元ベクトル空間とし

$$f : V \longrightarrow W$$

を線形写像とする。よく知られているように

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &= f^{-1}(0) \\ \operatorname{Coker} f &= W / \operatorname{Im} f \end{aligned}$$

とおくと,

$$f \text{ が同型} \Longleftrightarrow \operatorname{Ker} f = 0 \text{ かつ } \operatorname{Coker} f = 0$$

である。

一般に

$$f : G \longrightarrow H$$

が群の準同型の時, f で計ることのできる G と H の違いは

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &= \{g \in G \mid f(g) = e\} \\ \operatorname{Coker} f &= H/\operatorname{Im} f \end{aligned}$$

に現れる。しかし一般に $\operatorname{Im} f$ は H の正規部分群とは限らないので $\operatorname{Coker} f$ は群になるとは限らない。そこで $\operatorname{Coker} f$ の代わりに $\operatorname{Im} f$ を使った方がよい。更に二つだけでなく幾つもの群の関係を記述するときには完全列 (exact sequence) の概念が便利である。

定義 3.8.3.

$$G_1 \xrightarrow{f_1} G_2 \xrightarrow{f_2} G_3 \tag{3.9}$$

を群と準同型の列とする。この列が G_2 で**完全** (*exact*) であるとは,

$$\operatorname{Im} f_1 = \operatorname{Ker} f_2$$

であることである。言い替えれば

$$\begin{aligned} f_2 \circ f_1 &= 0 \\ f_2(x) = 0 &\Longrightarrow {}^{\exists}y \in G_1, \text{ s.t. } x = f_1(y) \end{aligned}$$

ということである。このとき, 単に (3.9) を**完全列** (exact sequence) という。

さらに一般の群と準同型の列

$$\cdots \longrightarrow G_{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} G_k \xrightarrow{f_k} G_{k+1} \longrightarrow \cdots \tag{3.10}$$

が**完全**であるとは, 各 k について

$$G_{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} G_k \xrightarrow{f_k} G_{k+1}$$

が G_k で完全であることである。この場合も (3.10) を完全列という。特に強調するときには**長い完全列** (*long exact sequence*) という。

これでファイバー束のファイバー, 全空間, そして底空間のホモトピー群の関係を述べる準備ができた。まず最初にわかることは次の事実である。

命題 3.8.4. ファイバーが F のファイバー束 $p: E \to B$ の底空間 B が基点 $*$ を持つ CW 複体であるとし,

$$i : F \cong p^{-1}(*) \hookrightarrow E$$

を基点上のファイバーの包含写像とする。このとき, $n \geq 1$ に対し

$$\pi_n(F) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B)$$

は完全である。

証明. 証明は, ほとんど被覆ホモトピー定理の言い替えである。

$$\begin{aligned} p_* \circ i_* \quad &= \quad 0 \\ p_*([f]) = 0 \quad \Longrightarrow \quad &{}^{\exists}[g] \in \pi_n(F), \text{ s.t. } \ i_*([g]) = [f] \end{aligned}$$

の二つのことを示したい。

まず定義より $F = p^{-1}(*)$, よって $p \circ i(F) = \{*\}$ であり, $p \circ i = *$ となる, ここで $*$ は基点 $*$ への定値写像である。 ゆえに演習問題 3.8.2 により

$$p_* \circ i_* = 0$$

がわかる。

逆に $[f] \in \pi_n(E)$ に対し, $p_*([f]) = 0$ とする。つまり $p \circ f \simeq *$ である。その (基点を保つ) ホモトピーを

$$H : S^n \times [0,1] \longrightarrow B$$

とすると,

$$H|_{S^n \times \{0\}} = p \circ f$$

で

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ S^n \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "p \circ f"] & B \end{tikzcd}$$

が可換となり, 基点付き被覆ホモトピー定理が使える状況になっている。 よって基点を保つホモトピー

$$\widetilde{H} : S^n \times I \longrightarrow E$$

で

$$\begin{aligned} p \circ \widetilde{H} \quad &= \quad H \\ \widetilde{H}|_{S^n \times \{0\}} \quad &= \quad f \end{aligned}$$

であるものが存在する。$g = \widetilde{H}|_{S^n \times \{1\}}$ とおく。 すると

$$p \circ g = p \circ \widetilde{H}|_{S^n \times \{1\}} = H|_{S^n \times \{1\}} = *$$

となるから $p(g(S^n)) = \{*\}$ である。つまり

$$g(S^n) \subset p^{-1}(\{*\}) = F$$

よって $[g] \in \pi_n(F)$ である。また $\widetilde{H}$ は基点を保つホモトピー $f \simeq i \circ g$ を与えている。これで

$$[f] = i_*([g])$$

となる基点を保つ写像 $g : S^n \to F$ の存在が示された。 □

これで各 n について完全列

$$\pi_n(F) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B)$$

が得られた。

ここで $p : E \to B$ は全射であり $i : F \longrightarrow E$ は単射である。しかしながら, ホモトピー群の間に誘導された写像については, p_* が全射であることも i_* が単射であることも一般には分らないのである。

例 3.8.5. 証明無しに認めて欲しいのであるが,

$$\begin{aligned} \pi_n(S^n) &\cong \mathbb{Z} \\ \pi_n(D^{n+1}) &= 0 \end{aligned}$$

である。上の方は Hurewiczの定理か何かを使わないと証明できないのであるが, 下は D^{n+1} が可縮であり, 可縮な空間のホモトピー群は全て自明である, という簡単に証明できる事実からすぐ分かる。

ところで, $S^n = \partial D^{n+1}$ と思って包含写像

$$i : S^n \hookrightarrow D^{n+1}$$

を考えると, この写像がホモトピー群の間に誘導する写像は

$$i_* : \pi_n(S^n) = \mathbb{Z} \longrightarrow 0 = \pi_n(D^{n+1})$$

となり, 単射ではない。 □

ではファイバー束

$$F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$$

があったとき

$$i_* : \pi_n(F) \longrightarrow \pi_n(E)$$

がどれだけ単射からはずれているか, つまり $\mathrm{Ker}\, i_*$ を考えてみることにしよう。

$[f] \in \pi_n(F)$ に対し $i_*([f]) = 0$ であるとしよう。$i_*([f]) = 0$ ということは

$$f \simeq * \text{ in } E$$

であり, それは命題 3.6.6 の証明と全く同様にして, 基点を保つ連続写像

$$\tilde{f} : D^{n+1} \longrightarrow E$$

で

$$\tilde{f}|_{\partial D^{n+1}} = f$$

であるものが存在することと同値であることが分かる。このとき

$$f : S^n \longrightarrow F$$

だから

$$(p \circ \tilde{f})(\partial S^n) = \{*\}$$

であり $p \circ \tilde{f}$ は基点を保つ写像

$$\bar{f} : D^{n+1}/\partial D^{n+1} = S^{n+1} \longrightarrow B$$

を誘導する。この対応により

$$\mathrm{Ker}\, i_* \longrightarrow \pi_{n+1}(B)$$

という写像が定義できそうであるが, 残念ながらこれは well-defined にはならない。Well-defined になるのは逆向きの対応である。

定義 3.8.6. $p : E \to B$ を F をファイバーとするファイバー束とする。B が基点付き CW 複体のとき, $n \geq 1$ に対し, 写像 $\partial : \pi_n(B) \to \pi_{n-1}(F)$ を次のように定義する。

$[f] \in \pi_n(B)$ を取る。元々の定義では f は

$$f : S^n \longrightarrow B$$

という基点を保つ写像であったが, $S^n = D^n/\partial D^n$ なので

$$f : D^n \longrightarrow B$$

という写像で $f(\partial D^n) = \{*\}$ であるものと思っても良い。 さらに

$$D^n = S^{n-1} \times [0,1]/S^{n-1} \times \{0\} \cup \{*\} \times [0,1]$$

と同一視する。

$$\pi : S^{n-1} \times [0,1] \longrightarrow S^{n-1} \times [0,1]/S^{n-1} \times \{0\} \cup \{*\} \times [0,1] = D^n$$

を射影とする。ここで合成

$$H : S^{n-1} \times [0,1] \xrightarrow{\pi} D^n \xrightarrow{f} B$$

を考えると $x \in S^{n-1}, t \in [0,1]$ に対し

$$\begin{aligned} H(x,0) &= * \\ H(*,t) &= * \end{aligned}$$

よって H は基点を保つホモトピーである。このホモトピーに対し, 基点付き被覆ホモトピーを使うと,

$$\widetilde{H} : S^{n-1} \times [0,1] \longrightarrow E$$

で

$$\begin{aligned} p \circ \widetilde{H} &= H \\ \widetilde{H}|_{S^{n-1}\times\{0\}} &= * \end{aligned}$$

となるものが得られる。そこで

$$g = \widetilde{H}|_{S^{n-1}\times\{1\}} : S^{n-1} \longrightarrow E$$

とおく。

$$p \circ g = p \circ \widetilde{H}|_{S^{n-1}\times\{1\}} = H|_{S^{n-1}\times\{1\}} = f|_{\partial D^n} = *$$

より $g(S^{n-1}) \subset p^{-1}(*) = F$ であり, $[g] \in \pi_{n-1}(F)$ が得られた。この構成により

$$\partial : \pi_n(B) \longrightarrow \pi_{n-1}(F)$$

を $\partial([f]) = [g]$ として定義する。 これを連結準同形 (*connecting homomorphism*) という。

演習問題 3.8.7. この写像 ∂ は well-defined, すなわち $\widetilde{H}$ の取り方によらないことを示せ。また $n \geq 2$ なら ∂ は群の準同型になることを示せ。(Hint: 被覆ホモトピー拡張定理をつかう。)

上で定義した ∂ が $\mathrm{Ker}\, i_*$ と期待通りの関係があることは, 次の命題から分かる。

命題 3.8.8. 命題 *3.8.4* と同じ仮定のもとで, $n \geq 2$ なら

$$\pi_n(B) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F) \xrightarrow{i_*} \pi_{n-1}(E)$$

は完全である。

証明. ∂ の定義に使った

$$\widetilde{H} : S^{n-1} \times I \longrightarrow E$$

は基点への定値写像 $*$ と g の E 内でのホモトピーを与える。よって

$$i_* \circ \partial([f]) = i_*([g]) = 0$$

となり $i_* \circ \partial = 0$ である。

逆に $[g] \in \pi_{n-1}(F)$ で $i_*([g]) = 0$ であるものを取る。つまり g は E 内で定値写像 $*$ とホモトピックであるとする。

$$\widetilde{G} : S^{n-1} \times [0,1] \longrightarrow E$$

をそのホモトピーとし

$$G = p \circ \widetilde{G} : S^{n-1} \times [0,1] \longrightarrow B$$

とおく。$\widetilde{H}|_{S^{n-1}\times\{0\}} = *$ より, $H|_{S^{n-1}\times\{0\}} = *$ となる。また $\widetilde{H}$ が基点を保つホモトピーだから H も基点を保つホモトピーである。よって H は写像

$$f : D^n = S^{n-1} \times [0,1]/S^{n-1} \times \{0\} \cup \{*\} \times [0,1] \longrightarrow B$$

を定める。ところが

$$f|_{S^{n-1}} = H|_{S^{n-1}\times\{1\}} = p \circ g = *$$

より f は $\pi_n(B)$ の元を定める。∂ の構成の仕方を見れば

$$[f] = \partial[g]$$

であることがわかる。

これで完全であることが示された。 □

更に次のことも成り立つ。

命題 3.8.9. *命題 3.8.4 と同じ仮定のもとで, $n \geq 2$ なら*

$$\pi_n(E) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F)$$

は完全である。

証明. まず $\partial \circ p_* = 0$ を示す。$[f] \in \pi_n(E)$ を取り

$$\begin{aligned} f : D^n &\longrightarrow E \\ f(\partial D^n) &= \{*\} \end{aligned}$$

である写像で代表されていると思う。$p \circ f$ に対する ∂ の構成の時の $\widetilde{H}$ として

$$S^{n-1} \times [0,1] \xrightarrow{\pi} D^n \xrightarrow{f} E$$

が取れるので

$$
\begin{aligned}
\partial([p\circ f]) &= [\widetilde{H}|_{S^{n-1}\times\{1\}}] \\
&= [f|_{S^{n-1}}] \\
&= [*] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

よって $\partial\circ p_* = 0$ である。

逆に，$[f]\in\pi_n(B)$ を取り $\partial([f])=0$ と仮定する。つまり

$$\widetilde{H} : S^{n-1}\times[0,1]\longrightarrow E$$

を

$$S^{n-1}\times[0,1]\xrightarrow{\pi} D^n \xrightarrow{f} B$$

のリフトとしたとき F の中で $\widetilde{H}|_{S^{n-1}\times\{1\}}\simeq *$ であるとする。

$$G : S^{n-1}\times\{1\}\times[0,1]\longrightarrow F\subset E$$

をそのホモトピーとし

$$G' : (S^{n-1}\times\{0\}\cup\{*\}\times[0,1])\times[0,1]\longrightarrow E$$

を基点への定値写像とする。これで写像

$$
\begin{aligned}
\widetilde{H} &: S^{n-1}\times[0,1]\times\{0\}\longrightarrow E \\
G\cup G' &: (S^{n-1}\times\{0,1\}\cup\{*\}\times[0,1])\times[0,1]\longrightarrow E
\end{aligned}
$$

が得られた。簡単のために

$$
\begin{aligned}
X &= S^{n-1}\times[0,1] \\
A &= S^{n-1}\times\{0,1\}\cup\{*\}\times[0,1] \\
K &= G\cup G'
\end{aligned}
$$

とおくと $\widetilde{H}|_{A\times\{0\}} = K|_{A\times\{0\}}$ である。また

$$H : X\times[0,1]\longrightarrow B$$

を $H(x,t,s) = p\circ\widetilde{H}(x,t)$ で定義すると，

$$
\begin{tikzcd}
X\times\{0\}\cup A\times[0,1] \arrow[r, "\widetilde{H}\cup K"] \arrow[d, "\cap"'] & E \arrow[d, "p"] \\
X\times[0,1] \arrow[r, "H"] & B
\end{tikzcd}
$$

が可換となる。これは被覆ホモトピー拡張定理 (定理 3.6.27) の条件を満たしているので，K の拡張でかつ H の lift であるホモトピー

$$\tilde{K} : X \times [0,1] \longrightarrow E$$

が存在する。

$$\tilde{K}(S^{n-1} \times \{0\} \cup \{*\} \times [0,1]) = \{*\}$$

なので

$$\tilde{K} : D^n \times [0,1] = (S^{n-1} \times [0,1]/S^{n-1} \times \{0\} \cup \{*\} \times [0,1]) \times [0,1] \longrightarrow E$$

が誘導される。そこで$g = \tilde{K}|_{D^n \times \{1\}}$とおくと

$$g(S^{n-1}) = \tilde{K}(S^{n-1} \times \{1\} \times \{1\}) = \{*\}$$

なので$[g] \in \pi_n(E)$を定め，$p_*[g] = [f]$である。

これで完全であることが示された。 □

上の三つの命題を合わせると，ホモトピー群の長い完全列

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(F) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \pi_1(B)$$

を得る。

この列の右端については次のことがわかる。

補題 3.8.10. $E \to B$をファイバー F が弧状連結なファイバー束とすると

$$p_* : \pi_1(E) \longrightarrow \pi_1(B)$$

は全射である。

証明. $[\ell] \in \pi_1(B)$ を取る。このとき ℓ は

$$\ell : [0,1] \longrightarrow B$$

で $\ell(0) = \ell(1) = *$ である写像と思ってよい。 $[0,1] = \{*\} \times [0,1]$ と考えると，ℓ は底空間 B へのホモトピーである。$x_0 \in p^{-1}(*)$ を取り，

$$\{*\} \times \{0\} \longrightarrow E$$

を x_0 への定値写像とすると

$$\begin{tikzcd}
\{*\} \times \{0\} \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\
\{*\} \times I \arrow[r, "\ell"] & B
\end{tikzcd}$$

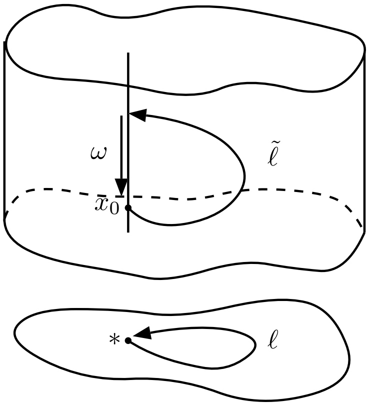
は可換になり, 被覆ホモトピー定理により

$$\begin{tikzcd}
\{*\} \times \{0\} \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\
\{*\} \times I \arrow[r, "\ell"] \arrow[ur, dotted, "\tilde{\ell}"] & B
\end{tikzcd}$$

を可換にする連続写像

$$\tilde{\ell} : [0,1] \longrightarrow E$$

が存在する。



このとき $\tilde{\ell}(1) = x_0$ とは限らないが, F が弧状連結なので $F = p^{-1}(*)$ の中で $\tilde{\ell}(0) = x_0$ と $\tilde{\ell}(1)$ を結ぶ道

$$\omega : [0,1] \longrightarrow E$$

を取り

$$\hat{\ell}(t) = \begin{cases} \tilde{\ell}(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \omega(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

と定義すると $[\hat{\ell}] \in \pi_1(E)$ であり,

$$p_*([\hat{\ell}]) = [\ell]$$

である。 □

全射であることを完全列で表すと次のようになる。

演習問題 3.8.11. $f : G \to H$ を群の準同型とし, 0 で単位元だけの群を表すことにする。このとき f が全射であることと

$$G \xrightarrow{f} H \longrightarrow 0$$

が完全であることは同値であることを示せ。 ここで右の写像は全ての元を単位元に写す写像である。

以上のことからファイバーが弧状連結な時には

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(F) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \pi_1(B) \longrightarrow 0$$

という完全列ができることがわかる。

定義 3.8.12. これをファイバー束 $E \to B$ のホモトピー長完全列 (*homotopy long exact sequence*) という。

演習問題 3.8.13. $p : E \to B$ が主 G束のとき, $\pi_0(G)$ に G の積で群の構造を定義すると

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(G) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(G) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \pi_1(B) \longrightarrow \pi_0(G)$$

が完全になることを示せ。更に E が弧状連結な時は

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(G) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(G) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \pi_1(B) \longrightarrow \pi_0(G) \longrightarrow 0$$

が完全であることを示せ。

演習問題 3.8.14. 一般のファイバー束 $F \to E \to B$ に対し, (群と集合の列)

$$\pi_1(B) \longrightarrow \pi_0(F) \longrightarrow \pi_0(E) \longrightarrow \pi_0(B)$$

について何が言えるか考えよ。

3.9 普遍束の構成

さて, 前節で構成したファイバー束のホモトピー群に関する長い完全列を使って, 普遍束の構成にとりかかろう。目標は, 位相群 G に対し, 主 G束

$$EG \longrightarrow BG$$

で EG が ∞連結, つまりEGのホモトピー群が全部 0 であるものを構成することである。もし ∞連結である空間 EG で G が作用しているものがあれば, §2.5 や §2.6 で見たように, 射影

$$EG \longrightarrow EG/G$$

は主G束になっていることが多いので, $BG = EG/G$ と取れば良いだろうと予想できる。そこで当面の目標は, そのような空間 EG を見つけることである。

G の作用はさておいて, とにかくホモトピー群が自明になっているような空間を探そう。とはいっても, これはあまり簡単なことではない。もちろん一点 $\{*\}$ を取ればホモト

ピー群は全て消えているが，この空間は小さすぎて群の作用する余裕がない (もちろん自明な作用はあるが)。 EG としてはある程度大きな空間が必要である。

しかし，今までに調べた空間の中で，ホモトピー群のことが少しは分かっているものとしては球面しかないので，とりあえずは球面を考えよう。系3.6.26 より S^n は $(n-1)$連結であることが分かっている。ここでもし $n \to \infty$ と取れれば，∞連結な空間 S^∞ が得られる。しかし，位相空間の極限などどうやって取ったら良いのだろうか。 実際には，位相空間や群などの極限 (inverse limit や direct limit) の理論は完成されていて，現代数学では不可欠の道具なのであるが，ここではそのような抽象的な理論を用いないで，“無限次元の球面”を具体的に構成することにしよう。

定義 3.9.1. まず集合として

$$S^\infty = \left\{ (x_0, x_1, \ldots) \,\middle|\, x_i \in \mathbb{R}, \text{高々有限個を除いて } 0, \sum_{i=0}^{\infty} x_i^2 = 1 \right\}$$

と定義する。位相を入れるために有限次元の球面による近似を考える。

$$S^n = \left\{ (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \right\}$$

と考え

$$i_n : S^n \longrightarrow S^{n+1}$$

を $i_n(x_0, \ldots, x_n) = (x_0, \ldots, x_n, 0)$ で定義する。明らかに i_n は S^n の S^{n+1} の中への埋め込みであり，これにより

$$S^n \subset S^{n+1} \subset S^\infty$$

と考えられる。またこの包含関係により (集合として)

$$S^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} S^n$$

となっている。このとき S^∞ の位相を

$$A \subset S^\infty : \text{closed} \Longleftrightarrow A \cap S^n \text{が各 } S^n \text{ で closed}$$

として定義する。

この位相の定義の仕方は CW複体の定義の時の条件 (W) と同じであり，また以後頻繁に使うので，ここで一般的な定義を与えておこう。

定義 3.9.2. X を位相空間とし，$\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を X の部分空間による被覆とする。このとき X がこの被覆に対して弱位相 (*weak topology*) を持つとは，

$$A \subset X : \text{closed} \Longleftrightarrow A \cap X_\alpha \text{ が各 } X_\alpha \text{ で closed}$$

が成り立つこと，と定義する。

また X を集合，$\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を位相空間の集まりとし，集合として

$$X = \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$$

であるとする。このとき

$$A \subset X : \text{closed} \Longleftrightarrow A \cap X_\alpha \text{ が各 } X_\alpha \text{ で closed}$$

により X に位相を定義することを，X に $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ による弱位相を入れるという。

演習問題 3.9.3. 任意の位相空間は，任意の開被覆に対し弱位相を持つことを示せ。

演習問題 3.9.4. 任意の位相空間は有限閉被覆に対し弱位相を持つことを示せ。

この言葉を使えば，

$$S^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} S^n$$

という被覆により S^∞ に弱位相を入れたわけである。

S^∞ のホモトピー群が消えていることを示すのには次の事実を使う。

補題 3.9.5. *X をHausdorff空間とし，$\{X_n\}$ を X の閉部分空間の列で次の条件を満たすものとする。*

1. *$X_n \subset X_{n+1}$*
2. *$X = \cup_{n=1}^{\infty} X_n$*
3. *X は $\{X_n\}$ による被覆に対し弱位相を持つ*

すると，任意のコンパクト部分空間 $K \subset X$ に対し，$K \subset X_n$ である n が存在する。

証明. 背理法で証明する。K がどの X_n にも完全に含まれていることがないとすると，

$$K \cap (X_n - X_{n-1}) \neq \phi$$

である n が無限個存在する。そのような n の全体を $\{n_1, n_2, \cdots\}$ とし各 $K \cap (X_{n_k} - X_{n_k-1})$ から1点 x_k づつ取り $A = \{x_1, x_2, \cdots\}$ とする。任意の n に対し $A \cap X_n$ は有限個の点からなり，X は Hausdorff だから，これは閉である。よって A は X で閉である。$A \subset K$ で K はコンパクトだから A はコンパクト集合の閉部分集合としてコンパクトである。

ところが $A_i = A - \{x_i\}$ と置くと

$$A_i \cap X_n = \begin{cases} \{x_i\}, & n = n_i \\ \phi, & n \notin \{n_1, n_2, \ldots\} \end{cases}$$

となるから A_i は閉, よって各 $\{x_i\}$ は A の開部分集合である。今 A は無限集合だから,

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{x_i\}$$

という形のどれ一つとして省けない無限開被覆を持つことになり, これは A がコンパクトであることに矛盾である。 □

系 3.9.6. 全ての i について,

$$\pi_i(S^\infty) = 0$$

すなわち, S^∞ は ∞連結である。

証明. $f : S^i \to S^\infty$ に対し, $f(S^i)$ は S^∞ のコンパクト部分集合である。よって上の補題から, ある n について

$$f(S^i) \subset S^n$$

となる。ここで $n > i$ としてよい。系 3.6.26 より S^n 内で f は定値写像とホモトピックである。そのホモトピーを

$$H : S^i \times I \longrightarrow S^n$$

とおくと, 合成

$$S^i \times I \xrightarrow{H} S^n \hookrightarrow S^\infty$$

は, f と定値写像の S^∞ でのホモトピーを与える。 □

この系により, 位相群 G に対し S^∞ が全空間になるような主G束が存在すれば, それは普遍 G束である。単純な群に対しては, そのような主束を見つけるのは難しくない。

演習問題 3.9.7. 例 2.5.17では, 位数 2 の群 C_2 の S^n への作用が定義された。その商空間を

$$\mathbb{R}\mathrm{P}^n = S^n / C_2$$

と書き n次元実射影空間と呼んだ。このとき, 射影

$$S^n \longrightarrow \mathbb{R}\mathrm{P}^n$$

が主C_2束になることを示せ。

包含写像

$$S^n \hookrightarrow S^{n+1}$$

は埋め込み

$$\mathbb{R}\mathrm{P}^n \hookrightarrow \mathbb{R}\mathrm{P}^{n+1}$$

を誘導する。この包含関係により和集合を取り

$$\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}\mathrm{P}^n$$

とおく。位相はもちろん弱位相である。 これは無限次元実射影空間と呼ばれる。

演習問題 3.9.8. 射影

$$S^\infty \longrightarrow \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$$

は主 C_2束であることを証明せよ。

系 3.9.9.

$$S^\infty \longrightarrow \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$$

は主 C_2束であり, 任意のCW複体 X に対し, 一対一対応

$$[X, \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty] \cong P_{C_2}(X)$$

がある。

注意 3.9.10 (コホモロジーを知っている読者へ). $H^*(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ を X の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$係数のコホモロジーとすると

$$H^1(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong [X, \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty]$$

と同一視できることが知られている。よって X 上の C_2 を構造群に持つファイバー束は X の 1次元の mod 2 コホモロジーで完全に決定される。

このとき主 C_2束 $\xi = (E \xrightarrow{p} X)$ に対し

$$P_{C_2}(X) \cong [X, \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty] \cong H^1(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

という同型により定まる $H^1(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ の元を $w_1(\xi)$ と書き ξ の first Stiefel-Whitney class という。 上の系は, 主 C_2束はその first Stiefel-Whitney class により完全に決定されるということを言っている。

より一般に, 主G束をその底空間のコホモロジーにより調べるという動機から, 特性類 (characteristic class) というものが導入された。 詳しいことについては, Milnor と Stasheff の本 [MS74] を見るとよいだろう。

さて, C_2 を構造群に持つファイバー束に対してはこれで分類定理が証明されたが, これを他の位相群に一般化するのは難しい。問題は S^∞ がまだ小さすぎることである。S^∞ は無限次元の空間であり, 非常に大きいように思えるが, 実際には C_2 のような単純な群しか, まともに作用しないのである。 しかし S^∞ が ∞連結であるという事実は捨てがたいので, S^∞ を何とかして拡張してもっと大きな群が作用できる空間を作ろう。

S^∞ を拡張するといっても, 球面について今までで分かったことは, 数えるほどしかない。 S^nが $(n-1)$連結であることと C_2 が S^n に作用すること以外では

$$S^n \cong O(n+1)/O(n) \tag{3.11}$$

という同相ぐらいである。この同相写像を一般化することを考えよう。S^n をもっと大きくしたいのだから (3.11) の右辺の $O(n+1)$ を大きくするか, $O(n)$ を小さくするかである。しかし $O(n)$ を小さくするには限度があり, また S^n が $(n-1)$連結であるという事実は, 分母の $O(n)$ に関係しているようなので, 分子の $O(n+1)$ をもっと大きな群と取り替えることにしよう。

定義 3.9.11. 包含写像

$$O(n) \hookrightarrow O(n+k)$$

を

$$A \longmapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_k \end{pmatrix}$$

で定義し, これにより $O(n)$ を $O(n+k)$ の部分群とみなす。 そしてその商空間を

$$\mathrm{St}_{n,k}(\mathbb{R}) = O(n+k)/O(n)$$

をおき, これを実*Stiefel*多様体 (*Stiefel manifold*) という。

期待されるように, 次が成り立つ。

定理 3.9.12. $\mathrm{St}_{n,k}(\mathbb{R})$ は $(n-1)$連結である。

この証明のために次の事実が必要になる。

命題 3.9.13. G を位相群とし, H を

$$G \longrightarrow G/H$$

が局所断面を持つような閉部分群とする。すると H の閉部分群 K に対し,

$$G/K \longrightarrow G/H$$

は, H/K をファイバーとするファイバー束である。

証明. 仮定より

$$G \longrightarrow G/H \tag{3.12}$$

は主 H束である。H の積で H の H/K への作用

$$\mu : H \times H/K \longrightarrow H/K$$

を $\mu(h, h'K) = hh'K$ と定める。(3.12) に同伴した H/K をファイバーにもつファイバー束

$$G \times_H H/K \longrightarrow G/H$$

を考える。

このとき次の演習問題 3.9.14 より

$$G/K \longrightarrow G/H$$

は (3.12) に同伴したファイバー束となる。 □

演習問題 3.9.14. 写像

$$G \times_H H/K \longrightarrow G/K$$

を $(g, hK) \longmapsto ghK$ で定義するとこれは同相であり

$$\begin{array}{ccc} G \times_H H/K & \longrightarrow & G/K \\ \downarrow & & \downarrow \\ G/H & = & G/H \end{array}$$

を可換にすることを証明せよ。

定理 *3.9.12* **の証明.** k による帰納法で証明する。

$k = 1$ のとき,

$$\mathrm{St}_{n,1}(\mathbb{R}) = S^n$$

なので成り立つ。

全ての n について $\mathrm{St}_{n,k}$ が $(n-1)$連結であると仮定し, $\mathrm{St}_{n,k+1}(\mathbb{R})$ が $(n-1)$連結であることを証明する。 命題 3.9.13 により

$$O(n+k+1)/O(n) \longrightarrow O(n+k+1)/O(n+1)$$

は $O(n+1)/O(n)$ をファイバーとするファイバー束である。言い替えれば, S^n をファイバーとするファイバー束

$$\mathrm{St}_{n,k+1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{St}_{n+1,k}(\mathbb{R})$$

があるということである。これのホモトピー群の長い完全列

$$\cdots \longrightarrow \pi_i(S^n) \longrightarrow \pi_i(\mathrm{St}_{n,k+1}(\mathbb{R})) \longrightarrow \pi_i(\mathrm{St}_{n+1,k}(\mathbb{R})) \longrightarrow \cdots$$

を考える。仮定より, $i < n$ に対し,

$$\begin{aligned} \pi_i(S^n) &= 0 \\ \pi_i(\mathrm{St}_{n+1,k}(\mathbb{R})) &= 0 \end{aligned}$$

であるから, $i < n$ に対し

$$0 \longrightarrow \pi_i(\mathrm{St}_{n,k+1}(\mathbb{R})) \longrightarrow 0$$

という完全列を得る。

よって次の演習問題 3.9.15 より, $i < n$ に対し $\pi_i(\mathrm{St}_{n,k+1}(\mathbb{R})) = 0$ であることが示された。 □

演習問題 3.9.15. 一般に

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

が完全なら, $G = 0$ であることを示せ。

次に球面の時と同じように $n \to \infty$ としたい。

定義 3.9.16. 包含写像

$$O(n+k) \hookrightarrow O(n+k+1)$$

を

$$A \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

で定義する。これにより誘導される包含写像

$$\mathrm{St}_{n,k}(\mathbb{R}) = O(n+k)/O(n) \hookrightarrow O(n+k+1)/O(n+1) = \mathrm{St}_{n+1,k}(\mathbb{R})$$

によって

$$E\mathrm{O}(k) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{St}_{n,k}(\mathbb{R})$$

とおき, 弱位相を入れる。

系 3.9.6 と同様に, 補題 3.9.5 を用いて次を得る。

系 3.9.17. $E\mathrm{O}(k)$ は, ∞連結である。

この $E\mathrm{O}(k)$ に作用している群を見つけたい。$C_2 = O(1)$ が $S^\infty = E\mathrm{O}(1)$ に作用していることから, $O(k)$ が $E\mathrm{O}(k)$ に作用していそうである。 S^∞ の時は, S^n を $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分空間として表示して C_2 の作用を定義したが, これは $E\mathrm{O}(k)$ の場合にはうまくいかない。Stiefel多様体の定義を用いて, 直接主束を構成しよう。

定義 3.9.18. 対応

$$(A, B) \longmapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

により $O(n) \times O(k)$ を $O(n+k)$ の部分群とみなす。 その商空間を

$$\mathrm{Gr}_{n,k}(\mathbb{R}) = O(n+k)/O(n) \times O(k)$$

と書き, 実*Grassmann*多様体 (*Grassmannian manifold*) という。

命題 3.9.13 により, 射影

$$\mathrm{St}_{n,k}(\mathbb{R}) = O(n+k)/O(n) \longrightarrow O(n+k)/O(n)\times O(k) = \mathrm{Gr}_{n,k}(\mathbb{R})$$

は $O(n)\times O(k)/O(n) = O(k)$ をファイバーとするファイバー束となるが, これが主束であることは容易に分かる。

補題 3.9.19. 射影

$$\mathrm{St}_{n,k}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Gr}_{n,k}(\mathbb{R}) \tag{3.13}$$

は, 主 $O(k)$束である。

証明. 大体の考え方だけ述べる。詳細は, 読者の演習問題とする。

対応

$$A \longmapsto \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

により $O(k)$ を $O(n+k)$ の部分群とみなすことにより, $O(k)$ の $O(n+k)$ への作用

$$O(k)\times O(n+k) \longrightarrow O(n+k)$$

が定まる。これは $O(n)$ の作用と可換だから

$$O(k)\times O(n+k)/O(n) \longrightarrow O(n+k)/O(n)$$

を誘導する。射影 (3.13) は, この作用による商空間への射影に他ならない。もともと (3.13) はファイバー束であることが分かっているので, これは主 $O(k)$束である。 □

演習問題 3.9.20. 上の証明で端折った部分を埋めよ。

定義 3.9.21. Stiefel多様体の時と同様に,

$$O(n+k) \hookrightarrow O(n+k+1)$$

により包含写像

$$\mathrm{Gr}_{n,k}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{Gr}_{n+1,k}(\mathbb{R})$$

を得る。そこで

$$B\mathrm{O}(k) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Gr}_{n,k}(\mathbb{R})$$

とおき, 弱位相を入れる。

すると次が成り立つ。

定理 3.9.22. 射影

$$E\mathrm{O}(k) \longrightarrow B\mathrm{O}(k) \tag{3.14}$$

は主 $O(k)$束である。よってこれは, 普遍 $O(k)$束でもある。

証明. 面倒くさいので省略。 □

系 3.9.23. 任意のCW複体 X に対し, 一対一対応

$$[X, B\mathrm{O}(k)] \cong P_{O(k)}(X)$$

を得る。

これで $O(k)$ を構造群に持つファイバー束の分類定理が証明できた。$O(k)$ は $O(1) = C_2$ と比べてかなり大きな群 ($\dim O(k) = \frac{1}{2}k(k-1)$, $\dim O(1) = 0$) なので, $O(k)$ に対して普遍束が構成できたということは, 他の位相群についても普遍束が構成できる可能性が高いということである。実際, コンパクトな群については, (3.14) を用いて普遍G束を構成することができる。

定理 3.9.24. G を $O(k)$ の閉部分群とし

$$BG = \bigcup_{n=1}^{\infty} O(n+k)/O(n) \times G = E\mathrm{O}(k)/G$$

とおく。すると, 射影

$$E\mathrm{O}(k) \longrightarrow BG$$

は主 G束, よって普遍 G束になる。

系 3.9.25. $O(k)$ の閉部分群については, 分類定理が成り立つ。つまり, 任意のCW複体 X に対し,

$$[X, BG] \cong P_G(X)$$

という一対一対応がある。

次の定理により, たいていのコンパクトな位相群はある $O(k)$ の閉部分群であることが分かる。

定理 3.9.26. G をコンパクトな位相群とする。もし G の単位元 e の近傍 U で, U に含まれる G の部分群が $\{e\}$ のみであるようなものが存在するならば, Gは ある $O(k)$ に閉部分群として含まれる。

証明. 戸田-三村の [戸三79] 16ページの定理2.14を見よ。 □

ほとんどのコンパクト位相群, 例えばコンパクトLie群は, この定理の条件を満足することが知られている。

注意 3.9.27. 上の議論では Stiefel 多様体も Grassmann 多様体も単に直交群 $O(n+k)$ を閉部分群で割っただけのものとして扱っている。 上のように, コンパクト位相群に対する主束の分類定理を考えるときにはそれで十分だったのであるが, この二種類の空間の幾何

学的意味を理解することは，どんな種類の幾何学を専攻するにしても必須である。ここではこれ以上述べる余裕はないが，読者にはトポロジーや微分幾何学の入門書により，これらの空間の幾何学的な意味を理解しておくことをお薦めする。

3.10 Milnor と Milgram の構成

前節で，直交群 $O(k)$ の閉部分群になっているような位相群 G について普遍 G 束を構成した。そこで書いたように，多くのコンパクト群は $O(k)$ の閉部分群になっているので，かなりの位相群について，ファイバー束の分類定理が成り立つことが示されたことになるが，もちろんコンパクトでない位相群もたくさんある。それらについては分類定理は成り立たないのだろうか。

例 3.10.1. 整数の成す群 $\mathbb{Z}$ を考えよう。離散位相を入れてこれを位相群と思う。$\mathbb{Z}$ は離散位相を持ち，無限個の異なる点を含むので，コンパクトではない。よって前節の構成は使えない。しかし，実は 普遍 $\mathbb{Z}$ 束は既に本書の中に現れているのである。演習問題 2.2.30 を思い出そう。そこでは，位相群の準同型

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$$

が$f(x) = e^{2\pi ix}$で与えられていた。これが主 $\mathbb{Z}$ 束であることを確かめるのは，それほど難しくない。

$\mathbb{R}$ は可縮なので ∞連結，よって，$f : \mathbb{R} \to S^1$ は普遍 $\mathbb{Z}$ 束である。 □

演習問題 3.10.2. 演習問題 2.2.30 の写像 $f : \mathbb{R} \to S^1$ が主 $\mathbb{Z}$束になることを示せ。

もちろんこの構成をそのまま他の群に一般化することはできないが，この例は，コンパクトでない群についても，普遍 G束が存在する可能性を示唆している。本節では Milnor と Milgram による，一般の位相群に対する普遍 G束の構成を述べる。証明の細部は省略し，構成のアイデアだけを解説することにする。

最初に，コンパクトとは限らない群に対しても適用できる普遍束の構成法を発見したのは，J.W. Milnor [Mil56] である。彼は，空間に対するジョイン (join) と呼ばれる操作の持つある重要な性質に着目した。まずジョインの定義を思い出そう。

定義 3.10.3. X と Y を位相空間とする。X と Y の**ジョイン** (*join*) $X * Y$ を次のように定義する。

$$X * Y = X \times I \times Y / \sim$$

ここで関係 $\sim$ は $x, x' \in X, y, y' \in Y$ に対し

$$\begin{aligned}(x, 0, y) &\sim (x', 0, y) \\ (x, 1, y) &\sim (x, 1, y')\end{aligned}$$

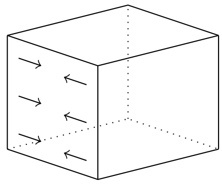


図 3.16: ジョイン

で与えられている。

より一般に, 位相空間 $X_1, \dots, X_n$ に対し,

$$X_1 * X_2 * \cdots * X_n = (\cdots((X_1 * X_2) * X_3) \cdots) * X_n$$

と定義する。

補題 3.10.4. 位相空間 $X_1, \dots, X_n$ に対し

$$X_1 * X_2 * \cdots * X_n \cong \{(t_1, x_1, \dots, t_n, x_n) \in I \times X \times \cdots \times I \times X \,|\, t_1 + \cdots + t_n = 1\} / \sim$$

である。ここで同値関係 $\sim$ は

$$(t_1, x_1, \dots, 0, x_i, \dots, t_n, x_n) \sim (t_1, x_1, \dots, 0, x_i', \dots, t_n, x_n)$$

で与えられる。

演習問題 3.10.5. これを示せ。

Milnor の着目したジョインの性質とは, 次のものである。

補題 3.10.6. 任意の空でない位相空間 X に対し, X の $(n+1)$ 個のジョインは $(n-1)$連結, つまり $i < n$ に対し

$$\pi_i(\underbrace{X * \cdots * X}_{n+1}) = 0$$

である。

証明. 省略。最も簡単な方法は Mayer-Vietoris のホモロジー完全列を使い, ホモロジーが $(n-1)$ 次元まで消えている事を示し, Whitehead の定理により同じ範囲でホモトピー群が消えている事を示すのであるが, ホモロジー群, Mayer-Vietoris 完全列, Whitehead の定理などを導入するのは大変なので, ここでは証明しない。 □

普遍G束を構成するときにいちばん本質的なのは, G がうまく作用する空間で, そのホモトピー群が全て消えているものを見つけることだった。 上の補題によって, ホモトピー群が全て消えている空間を作るためには, ジョインを無限回取れば良いことが分かる。G を作用させるためには, 空間 X として G が作用しているものを取れば良い。最も単純なのは $X = G$ と取ることである。

定義 3.10.7. 位相群 G と非負の整数か ∞ である n に対し

$$E_nG = \underbrace{G * \cdots * G}_{n+1}$$

とおく。G の E_nG への作用

$$\mu : G \times E_nG \longrightarrow E_nG$$

を

$$\mu(g; t_1, g_1, t_2, g_2, \ldots, t_{n+1}, g_{n+1}) = (t_1, gg_1, t_2, gg_2, \ldots, t_{n+1}, gg_{n+1})$$

で定義し，

$$B_nG = E_nG/G$$

とおく。

$n = \infty$ のときには

$$\begin{aligned} BG &= B_\infty G \\ EG &= E_\infty G \end{aligned}$$

と書くことにする。

補題 3.10.6 より E_nG は $(n-1)$連結であり，もし射影

$$p_n : E_nG \longrightarrow B_nG$$

が主 G 束になれば，これは n普遍束である。

ところが残念ながら，これはそのままではファイバー束になるとは限らないのである。問題は E_nG, B_nG に商位相を入れたことである。 局所自明化を得るためには，次のような位相を入れなければならない。

定義 3.10.8. $X_1, \ldots, X_n$ を空でない位相空間とする。$1 \leq i \leq n$ である整数 i に対し写像

$$t_i : X_1 * \cdots * X_n \longrightarrow [0, 1]$$

を

$$t_i([s_1, x_1, \ldots, s_n, x_n]) = s_i$$

で定義する。また

$$a_i : t_i^{-1}(0, 1] \longrightarrow X_i$$

を

$$a_i([s_1, x_1, \ldots, s_n, x_n]) = x_i$$

で定義する。

$X_1 * \cdots * X_n$ の強位相 (*strong topology*) とは，各 t_i, a_i が等化写像になる最も弱い (開集合の数が少ない) 位相である。 つまり次のような集合を開集合の基とする位相である。

- $\{[t_1, x_1, \ldots, t_n, x_n] \in X_1 * \cdots * X_n \,|\, \alpha < t_i < \beta\}$
- $\{[t_1, x_1, \ldots, t_n, x_n] \in X_1 * \cdots * X_n \,|\, x_i \in U \text{ for some open } U \subset X_i\}$

B_nG の強位相とは E_nG の G の作用による商空間としての等化位相と定義する。

定理 3.10.9 (Milnor). G を位相群とし, n を 0 以上の整数か ∞ とする。このとき E_nG, B_nG に強位相を入れると, 射影

$$p : E_nG \longrightarrow B_nG$$

は主 G 束になる。

証明. 主束であること, つまり構造群のことは読者に任せることにして, 局所自明なファイバー束になることを証明しよう。そのためには B_nG の開被覆でそれぞれの開集合の上で E_nG が自明になるものを見つけなければならない。Milnor の見つけた開被覆は次のものである。

$0 \leq j \leq n$ に対し

$$V_j = \{[s_0, g_0, \ldots, s_n, g_n] \in B_nG \,|\, s_j \neq 0\}$$

とおく。強位相の定義のときに使った写像

$$t_j : E_nG \longrightarrow [0,1]$$

から誘導された写像

$$\tilde{t}_j : B_nG \longrightarrow [0,1]$$

を用いると

$$V_j = \tilde{t}_j^{-1}((0,1])$$

となり, 強位相の定義から V_j は B_nG の開集合である。 また明らかに

$$B_nG = \bigcup_{j=0}^{n} V_j$$

である。

次に

$$p_n : p_n^{-1}(V_j) \longrightarrow V_j$$

の自明化を作ろう。

$$\begin{aligned} p_n^{-1}(V_j) &= p_n^{-1}(\tilde{t}_j^{-1}((0,1])) \\ &= (\tilde{t}_j \circ p_n)^{-1}((0,1]) \\ &= t_j^{-1}((0,1]) \end{aligned}$$

であるから, 強位相の定義に用いたもう一つの写像

$$a_j : t_j^{-1}((0,1]) \longrightarrow G$$

を用いて

$$(p_n, a_j) : p_n^{-1}(V_j) \longrightarrow V_j \times G$$

が定義される。強位相の定義から, a_j は連続であり, また

$$\begin{tikzcd} p_n^{-1}(V_j) \arrow[rr, "(p_n,a_j)"] \arrow[dr, "p_n"'] & & V_j \times G \arrow[dl, "pr_2"] \\ & V_j & \end{tikzcd}$$

は可換になる。

よって後は (p_n, a_j) の逆写像

$$\varphi_j : V_j \times G \longrightarrow p_n^{-1}(V_j)$$

を見つければよいのであるが, それは

$$\varphi_j(p_n([t_0, g_0, \ldots, t_n, g_n], g)) = [t_0, gg_j^{-1}g_0, \ldots, t_n, gg_j^{-1}g_n]$$

で与えられる。φ_j が well-defined で (p_n, a_j) の逆写像になっていることはすぐに分かる。最後に残った φ_j の連続性を考えよう。

まず φ_j は次の可換な図式に分解されることに注意する。

$$\begin{tikzcd} p_n^{-1}(V_j) \times G \arrow[r, "T"] \arrow[dd, "p_n"'] & G \times p_n^{-1}(V_j) \arrow[r, "id\times(a_j,id)"] & G \times G \times p_n^{-1}(V_j) \arrow[d, "id\times\nu\times id"] \\ & & G \times G \times p_n^{-1}(V_j) \arrow[d, "\mu\circ(id\times\mu)"] \\ V_j \times G \arrow[rr, "\varphi_j"] & & p_n^{-1}(V_j) \end{tikzcd}$$

ここで T は順序を入れ替える写像, ν は G の逆元を取る写像, そして μ は G の E_nG への作用である。

この図式で左の縦の写像は等化写像だから, 左上から右に行って下に降りる合成が連続であることが示されればよい。 その合成の中で強位相で連続であることが分かっていないのは μ だけであるが, それは直接確かめてもそれほど難しくはない。

これで

$$p_n : E_nG \longrightarrow B_nG$$

がファイバー束であることが示された。 □

補題 3.10.6 の証明は強位相でも変更無しに通用するので, 次を得る。

系 3.10.10. E_nG, B_nG に強位相を入れると

$$p_n : E_nG \longrightarrow B_nG$$

はn普遍主 G束になる。

系 3.10.11. 任意の位相群 G に対し, 主 G束の分類定理が成り立つ。

ファイバー束の分類定理のためには, この Milnor の構成で十分であるが, 実は普遍 G束の底空間 BG は位相群 G についての重要な情報を持っていることが知られている。そこで, できるだけ良い性質を持った BG の構成法を見つけたい。中でも必要となるのが, 次の二つの性質である。

1. 位相群の連続な準同型 $f : G \to H$ に対し, "自然に"連続写像

$$Bf : BG \longrightarrow BH$$

が誘導される。

2. "自然な"同相 $B(G \times H) \cong BG \times BH$ がある。

Milnor の構成は最初の条件を満たす, つまり群の準同型

$$f : G \longrightarrow H$$

に対し

$$Ef : EG \longrightarrow EH$$

を

$$Ef([t_0, g_0, t_1, g_1, \ldots]) = [t_0, f(g_0), t_1, f(g_1), \ldots]$$

と置けば, これは

$$Bf : BG \longrightarrow BH$$

を誘導する。しかし二番目の条件は満足されない。

この点を改良したのが, Milgram の構成である。補題 3.10.4 より, Milnor の構成は

$$\begin{aligned} E_nG &= \underbrace{G * \cdots * G}_{n+1} \\ &= \Delta^n \times G^{n+1} / \sim \end{aligned}$$

とみなすことができた。ここで

$$\Delta^n = \{(t_1, \ldots, t_{n+1}) \,|\, t_1 + \cdots + t_{n+1} = 1\}$$

は $(n+1)$単体である。

トポロジーを少しでも勉強したことがある人だと，単体が出てきて思い出すのは単体分割である。 古典的に，トポロジーでは空間を単体分割して，つまり単体の和集合として，考えることが多い。

現在では，単体分割された空間の一般化として，単体的集合 (simplicial set) とか単体的空間 (simplicial space) などが導入され，様々なところに応用されている [Cur71; GZ67; GJ99; May92] のであるが，よく見ると Milnor の構成は単体的空間の幾何学的実現 (geometric realization) というものとよく似ている。 このことを正確にしたのが Milgram の構成である。

Milgram の構成を説明するために，まず標準的な単体を正確に定義する。

定義 3.10.12. 0単体 (0-*simplex*) を

$$\Delta^0 = \{*\}$$

と定義する。$n \geq 1$ に対して n単体 (n-*simplex*) を

$$\Delta^n = \{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n \leq 1\}$$

として $\mathbb{R}^n$ の部分空間として定義する。

例 3.10.13. 1単体は単位区間である。

$$\Delta^1 = \{t_1 \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq t_1 \leq 1\} = [0, 1]$$

2単体は

$$\Delta^2 = \left\{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1\right\}$$

であり絵に描けば，

となる。3単体は

となる。 □

注意 3.10.14. Δ^{n-1} は Δ^n の面として Δ^n に含まれる。例えば, Δ^2 は Δ^3 の中の $t_1 = 0, t_1 = t_2, t_2 = t_3, t_3 = 1$ という式で与えられる四つの面と同相である。一般に Δ^n は

$$\begin{aligned} t_1 &= 0 \\ t_1 &= t_2 \\ t_2 &= t_3 \\ &\vdots \\ t_{n-1} &= t_n \\ t_n &= 1 \end{aligned}$$

という式で与えられる $(n+1)$ 個の面を持つ。

これで Milgram の構成を述べる準備ができた。

定義 3.10.15. G を位相群として任意の $n(0 \leq n \leq \infty)$ に対し

$$E_nG = \left(\coprod_{k=0}^{n} G \times \Delta^k \times G^k\right) / \sim$$

と置く, ここで同値関係 $\sim$ は次の四つの関係で生成されたものである。

$$(g_0; t_1, \ldots, t_n; g_1, \ldots, g_n) \in G \times \Delta^n \times G^n$$

に対し,

1. $t_1 = 0$ のとき,

$$(g_0; 0, t_2, \ldots, t_n; g_1, \ldots, g_n) \sim (g_0g_1; t_2, \ldots, t_n; g_2, \ldots, g_n)$$

2. $1 \leq k \leq n-1$ に対し $t_k = t_{k+1}$ のとき,

$$(g_0; t_1, \ldots, t_n; g_1, \ldots, g_n) \sim (g_0; t_1, \ldots, t_{k-1}, t_{k+1}, \cdots, t_n; g_1, \ldots, g_{k-1}, g_kg_{k+1}, g_{k+2}, \ldots, g_n)$$

3. $t_n = 1$ のとき,

$$(g_0; t_1, \ldots, t_n; g_1, \ldots, g_n) \sim (g_0; t_1, \ldots, t_{n-1}; g_1, \ldots, g_{n-1})$$

4. $1 \leq k \leq n$ に対し $g_k = e$ のとき,

$$(g_0; t_1, \ldots, t_n; g_1, \ldots, g_n) \sim (g_0; t_1, \ldots, t_{k-1}, t_{k+1}, \ldots, t_n; g_1, \ldots, g_{k-1}, g_{k+1}, \ldots, g_n)$$

G の E_nG への作用

$$\mu : G \times E_nG \longrightarrow E_nG$$

を

$$\mu(g,(g_0;t_1,\ldots,t_n;g_1,\ldots,g_n)) = (gg_0;t_1,\ldots,t_n;g_1,\ldots,g_n)$$

で定義し

$$B_nG = E_nG/G$$

とおく。

位相は E_nG も B_nG も等化位相である。

射影

$$p_n : E_nG \longrightarrow B_nG$$

が, 主 G束になることを期待して E_nG, B_nG を作ったのであるが, 残念ながら全ての位相群について, これが局所自明性を持っているとは限らない。しかし, 単位元の近傍についてある条件を満たしているような位相群については, 局所自明性を証明できる。その条件は以下のものである。

定義 3.10.16. 位相空間 X とその閉部分空間 A について (X,A) が *NDR*対 (*NDR pair*, neighborhood deformation retract pair) であるとは, 次の条件を満足する写像

$$\begin{aligned} u &: X \longrightarrow [0,1] \\ h &: X\times[0,1] \longrightarrow X \end{aligned}$$

が存在することである。

1. $u^{-1}(0) = A$

2. $U = u^{-1}([0,1))$ とおくと
$$h : X\times[0,1] \longrightarrow X$$
は X 内での U の A への変異レトラクト, つまり
   a) 任意の $a\in A$ に対し $h(a,t) = a$
   b) $h_{X\times\{0\}} = 1_X$
   c) $h(U\times\{1\}) \subset A$

   をみたすホモトピーである。

このとき, (h,u) を (X,A) の *NDR*表現 (*NDR representation*) という。

基点付き空間 (X,x_0) が空間対として NDR対のとき x_0 を非退化な基点 (*nondegenerate base point*) という。

定理 3.10.17 (Milgram). 単位元が非退化な基点である位相群 G と非負の整数 n または $n=\infty$ に対し

$$p_n : E_nG \longrightarrow B_nG$$

は主 G束になる。

注意 3.10.18. たいていの位相群 G はこの条件を満たす。例えば G が有限群や $\mathbb{Z}$ などの離散位相を持つ群 (discrete group), または Lie 群の時, この条件が満たされているのは明らかである。

定理 3.10.17 の証明. n についての帰納法で示す。

$n=0$ のとき

$$\begin{aligned} E_0G &= G \\ B_0G &= \{*\} \end{aligned}$$

であるから, p_0 は一点上の自明なファイバー束である。

p_n が 主 G束であることが示されたと仮定して, p_{n+1} が主 G束であることを示そう。局所自明化を見つけるために, $B_{n+1}G$ の開被覆を見つけなければならないが

$$B_nG \subset B_{n+1}G$$

は閉集合であるから $B_{n+1}G - B_nG$ は開集合, さらに

$$\varphi_{n+1} : p_{n+1}^{-1}(B_{n+1}G - B_nG) = E_{n+1}G - E_nG \longrightarrow (B_{n+1}G - B_nG) \times G$$

を

$$\varphi([g, t_1, \cdots, t_{n+1}, g_1, \cdots, g_{n+1}]) = ([t_1, \cdots, t_{n+1}, g_1, \cdots, g_{n+1}], g)$$

で定義すれば, これはwell-definedな同相写像である。

よって, 後は

$$\bigcup_{\alpha} U_\alpha \supset B_nG$$

となる $B_{n+1}G$ の開集合 U_α で, 各

$$p_{n+1} : p_{n+1}^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha$$

が自明化できるものを見つければよい。

帰納法の仮定より

$$p_n = p_{n+1}|_{E_nG} : E_nG \longrightarrow B_nG$$

は主 G束だから, B_nGの開被覆

$$B_nG = \bigcup_{\alpha} V_\alpha$$

とそのそれぞれの開集合上での自明化

$$\psi_\alpha : p_n^{-1}(V_\alpha) \xrightarrow{\cong} V_\alpha \times G$$

が存在する。

B_nG が $B_{n+1}G$ の開集合ではないため，この V_α は $B_{n+1}G$ の開集合にはならないが，V_α を少し膨らませれば $B_{n+1}G$ の開集合になりそうである。そのために (G, e) が NDR対であるという仮定が必要なのである。

まず $(\Delta^{n+1}, \partial\Delta^{n+1})$ と (G, e) が NDR対であるということと，NDR対の直積はまた NDR対であるという事実から，$(B_{n+1}G, B_nG)$ が NDR対であるということが分かる。その NDR表現を (h, u) とし

$$r(x) = h(x, 1)$$

により

$$r : B_{n+1}G \longrightarrow B_{n+1}G$$

を定義すると，NDR対の定義から r は $u^{-1}([0, 1))$ の B_nG の上へのレトラクトを与え

$$r : u^{-1}([0, 1)) \longrightarrow B_nG$$

を得る。そこで

$$U_\alpha = r^{-1}(V_\alpha)$$

とおくと $u^{-1}([0, 1))$ は $B_{n+1}G$ で開集合だから U_α は $B_{n+1}G$ の開集合である。これで

$$\bigcup_\alpha U_\alpha \supset B_nG$$

となる開集合が見つかった。局所自明化写像

$$\varphi_\alpha : p_{n+1}^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G$$

を見つけるために，$p_{n+1}^{-1}(U_\alpha)$ を考えよう。

まず $(B_{n+1}G, B_nG)$ の NDR表現を作ったのと全く同様の構成を行えば，$(E_{n+1}G, E_nG)$ の NDR表現 $(\tilde{h}, \tilde{u})$ で次の図式を可換にするものが作れる。

$$\begin{tikzcd}
E_{n+1}G \times I \arrow[r, "\tilde{h}"] \arrow[d, "p_{n+1}"'] & E_{n+1}G \arrow[d, "p_{n+1}"] \\
B_{n+1}G \times I \arrow[r, "h"] & B_{n+1}G
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
E_{n+1}G \arrow[r, "\tilde{u}"] \arrow[d, "p_{n+1}"'] & I \arrow[d, "\|"] \\
B_{n+1}G \arrow[r, "u"] & I
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
G \times E_{n+1}G \times I \arrow[r, "id\times\tilde{h}"] \arrow[d, "\mu\times id"'] & G \times E_{n+1}G \arrow[d, "\mu"] \\
E_{n+1}G \times I \arrow[r, "\tilde{h}"] & E_{n+1}G
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G \times E_{n+1}G \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "\mu"'] & E_{n+1}G \arrow[d, "\tilde{u}"] \\
E_{n+1}G \arrow[r, "\tilde{u}"] & I
\end{tikzcd}$$

$\tilde{h}$ を用いて r と同様に

$$\tilde{r} : E_{n+1}G \longrightarrow E_{n+1}G$$

を作れば，

$$\begin{tikzcd} p_{n+1}^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, "\tilde{r}"] \arrow[d, "p_{n+1}"'] & p_n^{-1}(V_\alpha) \arrow[d, "p_n"] \\ U_\alpha \arrow[r, "r"] & V_\alpha \end{tikzcd}$$

は可換となる。そこで

$$\varphi_\alpha : p_{n+1}^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G$$

を

$$\varphi_\alpha(x) = (p_{n+1}(x), pr_2(\psi_\alpha(\tilde{r}(x))))$$

で定義すると

$$\begin{tikzcd} p_{n+1}^{-1}(U_\alpha) \arrow[rr, "\varphi_\alpha"] \arrow[dr, "p_{n+1}"'] & & U_\alpha \times G \arrow[dl, "pr_1"] \\ & U_\alpha & \end{tikzcd}$$

は可換になる。よってあとは φ の逆写像を作るだけである。

求める写像は

$$\varphi_\alpha^{-1} : U_\alpha \times G \longrightarrow p_{n+1}(U_\alpha)$$

という形であるが，まず

$$\gamma_\alpha : p_{n+1}^{-1}(U_\alpha) \times G \longrightarrow p_{n+1}^{-1}(U_\alpha)$$

を

$$\gamma_\alpha(x, g) = g(\mathrm{pr}_2 \circ \psi_\alpha \circ \tilde{r})(x)^{-1}x$$

で定義する。この写像は明らかに連続であり，$g' \in G$ に対し

$$\begin{aligned} \gamma_\alpha(g'x, g) &= g(\mathrm{pr}_2 \circ \psi_\alpha \circ \tilde{r})(g'x)^{-1}g'x \\ &= g(g'(\mathrm{pr}_2 \circ \psi_\alpha \circ \tilde{r})(x))^{-1}g'x \\ &= g(\mathrm{pr}_2 \circ \psi_\alpha \circ \tilde{r})(x)^{-1}g'^{-1}g'x \\ &= g(\mathrm{pr}_2 \circ \psi_\alpha \circ \tilde{r})(x)^{-1}x \\ &= \gamma_\alpha(x, g) \end{aligned}$$

が成り立つ。よって well-defined な写像

$$\bar{\gamma}_\alpha : U_\alpha \times G \longrightarrow p_{n+1}^{-1}(U_\alpha)$$

を誘導する。これが φ_α の逆写像になっていることは容易に分かる。

$n = \infty$ のときを証明するためには，各 p_n の局所自明化の“極限”を取って局所自明化を作るのであるが，詳細は省略する。 □

注意 3.10.19. 上の証明のように, Milgram は [Mil67] で具体的に局所自明化を作ったのであるが, Milgram の構成およびその他の分類空間の構成を詳しく考察した Steenrod は, 論文 [Ste68] で別証を与えている。彼のアイデアは, 以下の通りである。

1. $E_\infty G$ に G が閉部分群になるような位相群の構造を入れる。

2. G で $E_\infty G$ を割った空間が $B_\infty G$ になることを示す。

3. 射影
$$E_\infty G \longrightarrow B_\infty G \tag{3.15}$$
が局所断面を持つことを示し, 定理 2.5.46 によりこれが主 G束になることを言う。

4. 射影
$$E_n G \longrightarrow B_n G \tag{3.16}$$
は, 包含写像
$$B_n G \hookrightarrow B_\infty G$$
による (3.15) のプルバックなので, (3.16) も主 G束になる。

ここで面白いのは, $E_\infty G$ に位相群の構造を入れてしまうことと, n についての帰納法で (3.16) が主束になることを証明するのではなく, いきなり $n = \infty$ の場合を証明してそれから一般の n の場合を導くことである。興味を持った読者は [Ste68] を読んでみると良いであろう。

さて, 今欲しいのは全空間のホモトピー群が消えている主 G束である。予想されるように (3.15) が, その求める主 G束になるのであるが, $E_\infty G$のホモトピー群が全て 0 になることを示すのに次の事実を使う。

補題 3.10.20. *X を Hausdorff空間とし, $\{X_n\}_{i=1,2,\cdots}$ を次の条件を満たす X の閉部分空間の列とする。*

1. *$X_n \subset X_{n+1}$*

2. *$X = \cup_{n=1}^\infty X_n$*

3. *X は $\{X_n\}$ という被覆に対し弱位相を持つ*

4. *各 n について包含写像 $X_n \hookrightarrow X_{n+1}$ は null-homotopic になる*

すると任意の i について $\pi_i(X) = 0$ である。

証明. $[f] \in \pi_i(X)$ を取る。それは基点を保つ連続写像

$$f : S^i \longrightarrow X$$

で代表される。最初の三つの条件は補題 3.9.5 の条件であり S^i はコンパクトなので

$$f(S^i) \subset X_n$$

となるような n が存在する。よって f は次のように分解できる。

$$\begin{array}{ccc} S^i & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow & & \uparrow \\ X_n & \longrightarrow & X_{n+1} \end{array}$$

しかし最後の条件より $X_n \hookrightarrow X_{n+1}$ は null-homotopic なので, 上の可換図式から f も null-homotopic になる。よって

$$[f] = 0 \in \pi_i(X)$$

となる。 □

演習問題 3.10.21. $\{E_nG\}_{n=1,2,\cdots}$ がこの補題の最初の三つの条件, つまり補題 3.9.5 の条件を満たすことを確かめよ。

上の補題より $E_\infty G$ が ∞連結であることを示すには, 全ての n について

$$E_nG \hookrightarrow E_{n+1}G$$

が null-homotopic であることを示せばよい。 しかし具体的にホモトピーを作るのは難しくない。

命題 3.10.22. 包含写像

$$E_nG \hookrightarrow E_{n+1}G$$

は定値写像にホモトピックである。

証明. E_nG の点は $(g_0; t_1, \cdots, t_n; g_1, \cdots, g_n)$ と書ける。ここで $t_n = 1$ ならこの点は $E_{n-1}G$ に入っている。よって各 t_i を 1 に持っていくホモトピーを作ればこの点は $g_0 \in E_1$ にいってしまう。 そのようなホモトピー

$$h : I \times I \longrightarrow I$$

として例えば

$$h(t, s) = \min\{1, s + t\}$$

があるが, 最後に残った g_0 を消すためには少し工夫が必要になる。 そのためにホモトピーの行き先として E_nG ではなく $E_{n+1}G$ が必要になるのである。具体的には

$$H : E_nG \times I \longrightarrow E_{n+1}G$$

を

$$H(g_0; t_1, \cdots, t_n; g_1, \cdots, g_n; s) = (e, h(0, s), h(t_1, s), \cdots, h(t_n, s); g_0, g_1, \cdots, g_n)$$

で定義すれば

$$\begin{aligned} H(g_0; t_1, \cdots, t_n; g_1, \cdots, g_n; 0) &= (e, h(0, 0), h(t_1, 0), \cdots, h(t_n, 0); g_0, g_1, \cdots, g_n) \\ &= (e; 0, t_1, \cdots, t_n; g_0, g_1, \cdots, g_n) \\ &= (g_0; t_1, \cdots, t_n; g_1, \cdots, g_n) \\ H(g_0; t_1, \cdots, t_n; g_1, \cdots, g_n; 1) &= (e, h(0, 1), h(t_1, 1), \cdots, h(t_n, 1); g_0, g_1, \cdots, g_n) \\ &= (e; 1, 1, \cdots, 1; g_0, g_1, \cdots, g_n) \\ &= (e; 1, \cdots, 1; g_0, \cdots, g_{n-1}) \\ &\vdots \\ &= (e; 1; g_0) \\ &= e \end{aligned}$$

となり H が求めるになる。 □

注意 3.10.23. このホモトピーが $E_\infty G$ 全体で定義されていることはすぐにわかる。 つまり $E_\infty G$ はホモトピー群が全て消えているだけでなく, 実は可縮な空間なのである。補題 3.10.20 は必要なかったのであるが, この補題を用いてホモトピー群が消えていることを示すテクニックは重要なので, 敢えてこの証明を紹介してみた。

系 3.10.24. *任意のiについて$\pi_i(E_\infty G) = 0$よって*

$$p : E_\infty G \longrightarrow B_\infty G$$

は普遍 G-bundleである。

注意 3.10.25. これまでの話では, 微分可能性 (smoothness) などは何も考慮にいれず議論してきたが, 実際には全て可微分多様体として考えるなければならないことも多い。 例えば, 現代の微分幾何はファイバー束の幾何学であると言っていいほど, そこではファイバー束の概念が重要な役割を果たしているのであるが, 当然そのときは全ての空間は可微分多様体であるし, 写像は全て微分可能である。

その意味では, これまでの構成の中で Grassmann 多様体を用いたものが最もよさそうである。実際, ベクトル束や主束の不変量として重要な特性類は, 主束の分類定理と

Grassmann 多様体のコホモロジーを用いて定義するのが最も一般的であるが, Grassmann 多様体の de Rham コホモロジーの元とみなしたときには, それらを代表する微分形式自体に重要な意味がある。 例えば, Chern-Simons による secondary characteristic class などである。

また無限次元の Grassmann 多様体自体, 様々なところに現われる重要な研究対象である。例えば KdV (Kortweg de Vries) 方程式やループ群との関連は Segal と Wilson の論文 [SW85] を読むといいだろう。

分類空間はそれ自体重要な研究対象である。例えば G が離散群, つまり離散位相をもつ位相群の場合,

$$\pi_1(BG) \cong G$$

であり, また BG のコホモロジーと代数的に定義された G のコホモロジーが同型になることが知られている。 分類空間の研究は現在の代数的トポロジーの中でも大きな分野を確立したと言える。

4　重要なファイバー束の例

順序が逆のような気がするが, 第I部を終る前に, ファイバー束の特別な場合, そして代表的な例である, 被覆空間とベクトル束について簡単に述べておきたい。

4.1　被覆空間

被覆空間を勉強したことのある人は, 被覆ホモトピー定理[1]が, 被覆空間の持つ道やホモトピーのリフトの存在に関する性質と, 良く似ていることに気が付いたかもしれない。 実際, 被覆空間はファイバー束の特別な場合と考えることができる。 本節で, その基本的な性質を前章までに得られたファイバー束の性質から証明してみよう。

4.1.1　ファイバー束としての被覆空間

まずここで用いる被覆空間の定義は以下のものである。

定義 4.1.1. F をファイバーとするファイバー束 $p: E \to B$ は, F が離散位相を持つとき, **被覆空間** (*covering space*) と呼ばれる。

この定義は, 標準的なトポロジーの教科書で用いられているものとは, 少し異なる。例えば, 底空間 B や全空間 E が連結であるとは仮定されていない。逆に, 全空間が連結であると仮定すると, 「自明な被覆空間」を扱うことができなくなってしまうので, ファイバー束の理論を翻訳するのが面倒になる。

被覆空間をファイバー束とみなすと, 被覆空間の間の写像を考えるのも簡単である。

定義 4.1.2. 被覆空間 $p: E \to B$ から $p': E' \to B'$ への**被覆写像**とは, ファイバーを保つ写像[2]のことである。

さて, まずはファイバー束の定義をファイバーが離散位相を持つ場合に翻訳してみよう。

[1]定理 3.3.16
[2]定義 3.1.1

定理 4.1.3. *B が連結のとき, $p: E \to B$ が被覆空間であるための必要十分条件は, 以下のものである。任意の $x \in B$ に対し, その開近傍 U_x と, x 上のファイバーの各点 $y \in p^{-1}(x)$ の開近傍 $\widetilde{U}_y$ が存在し, 以下の条件をみたす:*

1. *$y \neq y'$ ならば $\widetilde{U}_y \cap \widetilde{U}_{y'} = \emptyset$ である。*

2. *$p|_{\widetilde{U}_x} : \widetilde{U}_y \to U_x$ は同相写像である。*

証明. まず, $p: E \to B$ が被覆空間であるとし, F をそのファイバーとする。 ファイバー束の定義から, 各 $x \in B$ に対し, その開近傍 U_x と同相写像 $\varphi_x : p^{-1}(U_x) \xrightarrow{\cong} U_x \times F$ で図式

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(U_x) \arrow[rr, "\varphi_x"] \arrow[dr, "p"'] & & U_x \times F \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\
& U_x &
\end{tikzcd}$$

を可換にするものが存在する。ここで, 各 $y \in p^{-1}(x) \subset p^{-1}(U_x)$ に対し

$$\widetilde{U}_y = \varphi_x^{-1}(U_x \times \{\mathrm{pr}_2(\varphi_x(y))\})$$

とおく。 すると, F が離散位相を持つことより, $\mathrm{pr}_1|_{U_x \times \{\mathrm{pr}_2(\varphi_x(y))\}}$ が $U_x \times \{\mathrm{pr}_2(\varphi_x(y))\}$ と U_x の間の同相写像となり, 図式の可換性から $p|_{\widetilde{U}_y} : \widetilde{U}_y \to U_x$ も同相写像となる。また φ_x が同相写像であることより, $\widetilde{U}_y$ は y の開近傍になり, $y \neq y'$ ならば $\widetilde{U}_y \cap \widetilde{U}_{y'} = \emptyset$ となる。

逆に, 各点 $x \in B$ と $y \in p^{-1}(y)$ に対し, 条件をみたす U_x と $\widetilde{U}_y$ が存在したとする。条件から

$$p^{-1}(U_x) = \bigcup_{y \in p^{-1}(x)} \widetilde{U}_y$$

となるが, $\widetilde{U}_y$ は開集合かつ互いに交わらないので, $p^{-1}(x)$ は離散位相を持つ。また p から同相写像

$$\varphi_x : p^{-1}(U_x) \xrightarrow{\cong} U_x \times p^{-1}(x)$$

を得る。この同相写像は

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(U_x) \arrow[rr, "\varphi_x"] \arrow[dr, "p"'] & & U_x \times p^{-1}(x) \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\
& U_x &
\end{tikzcd}$$

を可換にする。また, 同相写像 φ_x の存在は, $x' \in U_x$ に対し, 全単射

$$p^{-1}(x) \cong p^{-1}(x')$$

があることも示している。B が連結で $\{U_x\}_{x \in B}$ が B の開被覆であることから, 任意の $x, x' \in B$ に対し, 全単射 $p^{-1}(x) \cong p^{-1}(x')$ があることが分かる。

ここで, $x_0 \in B$ を固定し, $F = p^{-1}(x)$ とおくとこれは離散位相を持ち, p は F をファイバーとするファイバー束であることが分かる。 □

注意 4.1.4. B が連結ではないときは, 各連結成分上でファイバーが異なるかもしれないことに注意する。

定理 4.1.3 により, 被覆空間がファイバー束の特別な場合であることが分かった。 次に考えることは, ファイバー束の様々な性質を翻訳することである。 構造群については §4.1.3 で考えることにし, 次節では被覆ホモトピー定理からの帰結について調べる。

4.1.2 道とホモトピーのリフト

ファイバー束の持つ最も重要な性質の一つが, 被覆ホモトピー性質 (CHP) だった。被覆空間の場合には, ファイバーが離散位相を持つことから, 更にリフトの一意性というとても有用な性質が得られる。

まず, 道のリフトを考えよう。系 3.3.16 で X が1点の場合を考えると次を得る。

系 4.1.5 (被覆空間の道のリフト). $p : E \to B$ を被覆空間とする。任意の連続な道 $\ell : [0,1] \to B$ と $y \in E$ で $p(y) = \ell(0)$ をみたす点に対し, E の連続な道

$$\tilde{\ell} : [0,1] \longrightarrow E$$

で $p \circ \tilde{\ell} = \ell$ かつ, $\tilde{\ell}(0) = y$ となるものが一意的に存在する。

証明. 一意性以外は, 系 3.3.16 そのものなので, 一意性を確かめよう。 □

同様に, ホモトピーのリフトが存在する。

系 4.1.6. 被覆空間 $p : E \to B$ と連続な道 $\ell : [0,1] \to B$ のリフト $\tilde{\ell} : [0,1] \to E$ が与えられているとする。任意のホモトピー

$$H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow B$$

で $H|_{[0,1]\times\{0\}} = \ell$ であるものに対し, H のリフト $\widetilde{H}$ で $\widetilde{H}|_{[0,1]\times\{0\}} = \tilde{\ell}$ となるものが一意的に存在する。

証明. □

4.1.3 被覆変換群と基本群

次に構造群を考えよう。

定義 4.1.7. G を離散位相を持つ空間 F に (左から) 作用する群とする。被覆空間 $p : E \to B$ は, G を構造群に持つとき, G被覆と呼ばれる。

注意 4.1.8. 通常は G が $\mathrm{Homeo}(F) = \mathrm{Aut}(F)$ の部分群である場合を考える。

被覆空間の場合, 構造群は被覆変換群と呼ばれる群と深い関係にある。

定義 4.1.9. 被覆空間 $p : E \to X$ に対し

$$\mathrm{Aut}(p) = \mathrm{Aut}(E/X) = \{f : E \to E \mid f \text{ 同相写像}, p \circ f = p\}$$

と定義し, 写像の合成で群とみなす。これを p の**被覆変換群** (*covering transformation group*) という。

基本群と被覆変換群の関係の基本は次のものである。

定義 4.1.10. 被覆空間 $p : E \to X$ の全空間 E が連結であるとする。$x_0 \in X$ と $e_0 \in p^{-1}(x_0)$ をとる。$e \in E$ と $\gamma \in \Omega(X, x_0)$ に対し, $\ell_*(e) \in E$ を以下のように定義する: e_0 を始点とする ℓ のリフト $\tilde{\ell}$ をとり,

$$\ell_*(e) = \tilde{\ell}(1)$$

とする。

道のリフトの一意性より, これは well-defined である。そして, この対応を $\Omega(X, x_0)$ の E への作用のようにみなしたいところであるが, 第II部 [FibII] §1.3 でみるように, 残念ながら $\Omega(X, x_0)$ は「積」は持つものの群ではない。 ホモトピックの関係で同値類をとり, 基本群にしてしまえば群になるので, 作用が定義できそうである。実際には, 少し条件が必要である。

命題 4.1.11. 上の定義の仮定の下で, 更に $p_*(\pi_1(E, e_0))$ が $\pi_1(X, x_0)$ の正規部分群であるとする。すると $\pi_1(X, x_0)$ の E への左作用が誘導される。

証明. □

普遍束に対応するのは, 当然普遍被覆である。基本群との関係から, 以下のように定義するのが妥当であることが分かる。

定義 4.1.12. 連結な空間 X 上の被覆空間 $p : E \to X$ は, E が単連結であるとき**普遍被覆** (*universal covering*) と呼ばれる。

4.2 ベクトル束

§1.1 で, ファイバー束を考える動機を説明するために挙げたのは, 2次元球面 S^2 の接束だった。一般に, 可微分多様体の接束はベクトル束という特別な構造を持ち, 線形代数の一般化を考えることができる。またベクトル束は, K理論の「生成元」となるものでもあり, 様々な分野で基本的な役割を果している。 本節でその基本的な性質を述べ, 第I部の締め括りとしたい。

4.2.1 ベクトル束とその分類

定義 4.2.1. ファイバー束は, そのファイバーが $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ であり, 構造群が $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ であるとき, 階数 n の (実) **ベクトル束** (*vector bundle*) という。 ファイバーが $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ であり, 構造群が $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ であるときは, 複素ベクトル束 (complex vector bundle) という。

位相空間 X 上の階数 n の実ベクトル束と複素ベクトル束の同型類の集合を, それぞれ $\mathrm{Vect}_n(X)$ と $\mathrm{Vect}_n^{\mathbb{C}}(X)$ とかく。

ベクトル束は principal $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$-bundle に同伴したファイバー束である。よって, その分類は, principal $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$-bundle や $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$-bundle の分類に帰着される。 つまり,

$$\begin{aligned}\mathrm{Vect}_n(X) &\cong P_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}(X)\\ \mathrm{Vect}_n^{\mathbb{C}}(X) &\cong P_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}(X)\end{aligned}$$

である。 ところが, 一般線形群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ や $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ はコンパクトではないので, 分類空間を考えるときには無駄が多い。その極大コンパクト部分群 $O(n)$ や $U(n)$ を考えれば十分である。

命題 4.2.2. 包含写像 $O(n) \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $U(n) \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ は, 分類空間の間のホモトピー同値写像

$$\begin{aligned}B\mathrm{O}(n) &\xrightarrow{\simeq} B\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\\ B\mathrm{U}(n) &\xrightarrow{\simeq} B\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\end{aligned}$$

を誘導する。

証明. □

系 4.2.3. パラコンパクト *Hausdorff* 空間 X について, 自然な全単射

$$\begin{aligned}\mathrm{Vect}_n(X) &\cong [X, B\mathrm{O}(n)]\\ \mathrm{Vect}_n^{\mathbb{C}}(X) &\cong [X, B\mathrm{U}(n)]\end{aligned}$$

がある。

つまり, 階数 n の実ベクトル束の分類は 主 $O(n)$ 束の分類に帰着されるわけであるが, このことを見るだけなら主束の分類定理を使う必要はない。 ここで実際に構造群を $O(n)$ に簡約してみよう。アイデアは, 線形代数の Gram-Schmidtの直交化を用いることである。よって内積が必要になる。

定義 4.2.4. 実ベクトル束上の計量とは,

パラコンパクト Hausdorff の条件があれば, 任意のベクトル束上に計量を定義できる。

命題 4.2.5.

そして, 計量があれば, 構造群を $O(n)$ もしくは $U(n)$ に簡約できる。

定理 4.2.6.

実ベクトル束の場合, 更に構造群を $\mathrm{SO}(n)$ まで簡約できることは重要な意味を持つ。

定義 4.2.7. 階数 n の実ベクトル束は, 構造群を $\mathrm{SO}(n)$ に簡約できるとき**向き付け可能** (*orientable*) という。

4.2.2 ベクトル束に対する操作

ベクトル束はベクトル空間を束ねたものなので, ベクトル空間に対する各種操作が「大域化」できそうである。実際, 接束に対するそのような操作は, 微分幾何学の基本となっている。

定義 4.2.8 (直和)**.** ベクトル束 $E \to X$ と $E' \to X$ に対し, $E \oplus E'$ を以下のように定義する。

定義 4.2.9 (Hom束)**.** ベクトル束 $E \to X$ と $E' \to X$ に対し, $\mathrm{Hom}(E, E')$ を以下のように定義する。

特に, E' が 1 次元の自明束 $X \times \mathbb{R}$ の場合, $E^* = \mathrm{Hom}(E, X \times \mathbb{R})$ と書き, E の双対ベクトル束 (dual vector bundle) という。

定義 4.2.10 (テンサー積)**.** ベクトル束 $E \to X$ と $E' \to X$ に対し, $E \otimes E'$ を以下のように定義する。

定義 4.2.11 (外積)**.** ベクトル束 $E \to X$ に対し, $\wedge^k E$ を以下のように定義する。

参考文献

[AS04] Michael Atiyah and Graeme Segal. “Twisted K-theory”. In: *Ukr. Mat. Visn.* 1.3 (2004), pp. 287–330. arXiv: `math/0407054` (cit. on p. 39).

[Bro76] L. E. J. Brouwer. *Collected works, Vol. 2*. Geometry, analysis, topology and mechanics, Edited by Hans Freudenthal. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1976, pp. xxvii+706 (cit. on p. 112).

[Cur71] Edward B. Curtis. “Simplicial homotopy theory”. In: *Advances in Math.* 6 (1971), 107–209 (1971) (cit. on p. 183).

[DH07] M. Dehn and P. Heegaard. *Analysis Situs*. Vol. III 1 AB 3. Enzyclopädie der mathematischen Wissenschaften. Leipzig: Teubner, 1907 (cit. on p. 112).

[Die89] Jean Dieudonné. *A history of algebraic and differential topology. 1900–1960*. Boston, MA: Birkhäuser Boston Inc., 1989, pp. xxii+648. ISBN: 0-8176-3388-X (cit. on p. 112).

[Dol63] Albrecht Dold. “Partitions of unity in the theory of fibrations”. In: *Ann. of Math. (2)* 78 (1963), pp. 223–255 (cit. on p. 120).

[Dug78] James Dugundji. *Topology*. Boston, Mass.: Allyn and Bacon Inc., 1978, p. xv 447. ISBN: 0-205-00271-4 (cit. on p. 122).

[Elm+97] A. D. Elmendorf, I. Kriz, M. A. Mandell, and J. P. May. *Rings, modules, and algebras in stable homotopy theory*. Vol. 47. Mathematical Surveys and Monographs. With an appendix by M. Cole. Providence, RI: American Mathematical Society, 1997, pp. xii+249. ISBN: 0-8218-0638-6 (cit. on p. 2).

[FFG89] A.T. Fomenko, D.B. Fuchs, and V.L. Gutenmacher. ホモトピー論. 東京: 共立出版株式会社, 1989 (cit. on p. 149).

[FibII] 玉木大. ファイバー東とホモトピー *II*. ファイバー東からホモトピー論へ (cit. on pp. 3, 95, 113, 196).

[GJ99] Paul G. Goerss and John F. Jardine. *Simplicial homotopy theory*. Vol. 174. Progress in Mathematics. Basel: Birkhäuser Verlag, 1999, pp. xvi+510. ISBN: 3-7643-6064-X (cit. on p. 183).

[GZ67] P. Gabriel and M. Zisman. *Calculus of fractions and homotopy theory*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 35. Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1967, pp. x+168 (cit. on p. 183).

[Hir03] Philip S. Hirschhorn. *Model categories and their localizations*. Vol. 99. Mathematical Surveys and Monographs. Providence, RI: American Mathematical Society, 2003, pp. xvi+457. ISBN: 0-8218-3279-4 (cit. on p. 2).

[Hov99] Mark Hovey. *Model categories*. Vol. 63. Mathematical Surveys and Monographs. Providence, RI: American Mathematical Society, 1999, p. xii 209. ISBN: 0-8218-1359-5 (cit. on p. 2).

[Kel75] John L. Kelley. *General topology*. Vol. 27. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1975, p. xiv 298 (cit. on pp. 45, 114).

[LW33] S. Lefschetz and J. H. C. Whitehead. “On analytical complexes”. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 35.2 (1933), pp. 510–517. URL: `http://dx.doi.org/10.2307/1989779` (cit. on p. 136).

[May92] J. Peter May. *Simplicial objects in algebraic topology*. Chicago Lectures in Mathematics. Reprint of the 1967 original. Chicago, IL: University of Chicago Press, 1992, pp. viii+161. ISBN: 0-226-51181-2 (cit. on p. 183).

[Mil56] John Milnor. “Construction of universal bundles. I, II”. In: *Ann. of Math. (2)* 63 (1956), pp. 272–284, 430–436 (cit. on p. 177).

[Mil63] J. Milnor. *Morse theory*. Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. Annals of Mathematics Studies, No. 51. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1963, pp. vi+153 (cit. on p. 136).

[Mil67] R. James Milgram. “The bar construction and abelian H-spaces”. In: *Illinois J. Math.* 11 (1967), pp. 242–250 (cit. on p. 189).

[MS74] John W. Milnor and James D. Stasheff. *Characteristic classes*. Annals of Mathematics Studies, No. 76. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1974, pp. vii +331 (cit. on p. 171).

[Mun00] James R. Munkres. *Topology*. 2nd. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall Inc., 2000, pp. xvi+537 (cit. on p. 65).

[Ste51] Norman Steenrod. *The Topology of Fibre Bundles*. Princeton Mathematical Series, vol. 14. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1951, pp. viii+224 (cit. on p. 1).

[Ste68] N. E. Steenrod. “Milgram’s classifying space of a topological group”. In: *Topology* 7 (1968), pp. 349–368 (cit. on p. 189).

[SW85] Graeme Segal and George Wilson. “Loop groups and equations of KdV type”. In: *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 61 (1985), pp. 5–65. URL: `http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1985__61__5_0` (cit. on p. 192).

[小中菅67]　小松醇郎, 中岡稔, and 菅原正博. 位相幾何学 *I*. 東京: 岩波書店, 1967 (cit. on pp. 65, 66, 155).

[戸三78]　戸田宏 and 三村護. リー群の位相(上). Vol. 14-A. 紀伊國屋数学叢書. 東京: 紀伊國屋書店, 1978 (cit. on p. 77).

[戸三79]　戸田宏 and 三村護. リー群の位相(下). Vol. 14-B. 紀伊國屋数学叢書. 東京: 紀伊國屋書店, 1979 (cit. on p. 176).

[松坂和68]　松坂和夫. 集合・位相入門. 東京: 岩波書店, 1968, pp. x+329 (cit. on pp. 36, 114).

[横田一71]　横田一郎. 群と位相. 東京: 裳華房, 1971 (cit. on pp. 13, 28, 63, 77).

[横田一78]　横田一郎. 多様体とモース理論. 京都: 現代数学社, 1978 (cit. on p. 136).

索引