ファイバー束とホモトピー II

ファイバー束からホモトピー論へ

玉木 大

信州大学理学部

Version: June 10, 2016

目次

序に代えて

本書の目的, 用途, 構成

Part IIの第1章は, 1993年度後期に講義した内容であるが, 第2章は新たに書き足したものである。ファイバー束を抽象化したのが fibration であるが, それに対し具体的な構成の際に重要な役割を果してきたのが quasifibration である。ホモトピー論の最も特徴的な方向性の一つは抽象化であるが, 実際の問題を解くときには具体的な構成が不可欠である。その意味で, quasifibration の章を追加した。

ファイバー束自体, 様々な幾何学で現在も重要な役割を果している。しかしながら, このノートではそれらの応用について述べる余裕はないし, 筆者にはその能力もない。ファイバー束の幾何学的応用については, 他書を参照されたい。

本書での基本的な約束

- 人名は基本的に原語表記とする。ただし初出時は括弧書きでカタカナの読みを添える。
- 数学用語は, 和訳が定着しているものは日本語表記とする。またカタカナ書きが一般的に用いられているものはカタカナ表記とする。それ以外の数学用語は英語表記とするが, 初出時のみ筆者による和訳を付けることにする。

謝辞

信州大学でファイバー束の講義を始めたのは1993年4月, ロチェスター大学で Ph.D.をとってほんの一ヶ月後のことだった。それが日本語で日本人の学生を教えた最初の経験である。アメリカで微積分と線形代数を教えたことはあったが, ファイバー束のような専門的な内容を講義したことはなかった。更に悪いことに, 4年生と大学院生向けに講義するつもりが, 蓋を開けてみれば, ほとんどの学生が3年生だった。

その講義をがまんして聴講し, きたない板書を読み取りノートをとり続けてくれた学生達には感謝したい。彼等が, 耳を傾けノートを取る姿に非常に励まされた。

最初の講義の後，そして1996年度の二度目の講義の後に，このノートの原形となったものを学生に配布したが，それを読んでミスプリントや間違いを指摘してくれた学生が何人もいた。さらに，それを2001年度の4年生のセミナーにも用いたが，そこで数多くの間違いが見つかり，このノートが人前に出せるまでになった。セミナーのメンバー，青木，大藤，嶋田，鶴田，そしてオブザーバーとして参加してくれた大学院生の椎名には非常に感謝している。

ファイバー束のホモトピー論的性質の重要性に気づいたのは，ロチェスター大学の大学院生だったとき，他の大学院生との議論やセミナーによる。現在の著者の数学観は，彼等を含めたロチェスター大学の algebraic topologists との交流により形成されたといって過言ではないだろう。この機会に，ロチェスター大学の algebraic topologists 及び留学の機会をつくっていただいた河野明先生には感謝の意を表したい。

1　ファイブレーション

1.1　どうしてファイバー束の一般化を考える必要があるのか?

第I部 [FibI] でファイバー束の基本的な性質は一通り解説したので, 本書ではファイバー束の一般化を考える。これまでのことからわかるように, ファイバー束というのは複雑で扱いづらいものである。その上抽象的で, 絵に描けるのは自明なファイバー束か Möbius の帯くらいである。そのようなファイバー束をどうして更に一般化しようというのだろうか? その答を今の時点で説明するのは難しいが, 次の二つが主な理由であると言っていいだろう。

1. ファイバー束の定義は複雑すぎる。例えば具体的に写像 $p : E \to B$ が与えられたとき, これがファイバー束かどうかを定義から確かめるのは非常に難しい。ファイバー束の基本的な性質を失わず, 定義をもっと単純化することができれば非常に有用なのではないだろうか。

2. ファイバー束に良く似たものでファイバー束ではないものがある。それらも含めた理論を構築したい。

これでは何のことかよくわからないかもしれないが, 「どうしてファイバー束の一般化を考える必要があるか」ということを考えながら, この第II部を読んでもらいたい。

ところで一般化とか抽象化とはどういうことだろう。本当はここで辞書を引くべきなのだろうが, それはちょっと面倒臭いので著者のイメージを述べると次のようになる。

$$\text{一般化, 抽象化} = \text{最も重要(本質的)な性質のみ抜き出すこと}$$

例えば, これまでにでてきた例で考えると,

1. $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, D_{2n}, \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), O(n)$ などは結合法則をみたす積を持ち, その積に対する単位元と逆元を持つ。そこで結合的な積, 単位元, 逆元を持つものを群として定義した。

2. $\mathbb{R}^n, D^n, S^n$ などは, 古くから知られている空間であるが, それらを研究する際には実は, それらの空間の中の開集合が分かっていれば良い。例えば, ある写像が連続であ

ることは, 開集合の逆像がまた開集合であるということで特徴付けられる。 これらの空間で開集合の持つ性質を一般化して, 位相空間の定義を得る。

3. ファイバー束自身も具体的な例の抽象化と考えられる。 第I部の第1章でみたように, Möbiusの帯, Hopf bundle $S^3 \to S^2$, あるいは位相群 G とその閉部分群 H に対しする射影 $G \to G/H$ などが共通して持つ局所自明性という性質を抽象化してできたのが, ファイバー束であった。

このファイバー束を更に一般化するためには, 局所自明性以外のファイバー束の性質のなかで, 重要と思われるものを抜き出さなければならない。そのため, §1.2では, まずこれまでに証明したファイバー束の性質を復習し, ファイバー束の一般化である Serre ファイバー空間および Hurewicz ファイバー空間を定義する。

1.2 Serre ファイバー空間と Hurewicz ファイバー空間

これまでに証明したファイバー束の持つ性質のなかで, 重要なものは次の四つであろう。

1. <u>被覆ホモトピー定理</u> $p : E \to B$ をファイバー束とし, X をパラコンパクト Hausdorff 空間とする。連続写像

$$\begin{aligned} H &: X \times I \longrightarrow B \\ f &: X \longrightarrow E \end{aligned}$$

で $H(x,0) = p \circ f(x)$ をみたすものに対し, ホモトピー

$$\widetilde{H} : X \times I \longrightarrow E$$

で

$$\begin{aligned} p \circ \widetilde{H} &= H \\ \widetilde{H}(x,0) &= f(x) \end{aligned}$$

であるものが存在する。

2. <u>ホモトピー群の長い完全列</u> $p : E \to B$ が F をファイバーとするファイバー束ならば,

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(F) \longrightarrow \pi_n(E) \longrightarrow \pi_n(B) \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow \pi_1(F) \longrightarrow \pi_1(E) \longrightarrow \pi_1(B)$$

という群の完全列が存在する。

3. <u>ホモトピー不変性</u> $p: E \to B$ をファイバー束, X をパラコンパクト Hausdorff 空間とし, $f, g: X \to B$ を連続写像とするとき, もし $f \simeq g$ なら, ファイバー束の同型
$$f^*(E) \cong g^*(E)$$
を得る。

4. <u>分類定理</u> G を位相群, X をCW複体とするとき, 分類空間と呼ばれる空間 BG が存在して一対一対応
$$P_G(X) \cong [X, BG]$$
がある。

ここでこれらの証明を思い出すと, 2, 3, 4の証明には1が重要な役割を果たしていることが分かる。 特に, 2は1だけから導かれた。 つまり, この中では1が最も本質的な性質であると考えられる。 そこで, この性質に名前を付けよう。

定義 1.2.1. $p: E \to B$ を連続写像とし, X を位相空間とする。p が X に対し**被覆ホモトピー性質** (*covering homotopy property*) を持つとは, 可換な図式
$$\begin{tikzcd} X \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "H"] & B \end{tikzcd}$$
に対し, 右斜め上向きの写像
$$\begin{tikzcd} X \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dotted, "{}^{\exists}\widetilde{H}"] & B \end{tikzcd}$$
で図式を可換にするものが存在すること, と定義する。

「被覆ホモトピー性質」(あるいは, covering homotopy property) と書くのはちょっと面倒なので, CHPと省略することが多い。

定義 1.2.2. 連続写像 $p: E \to B$ が, ***Serre* ファイバー空間** (*Serre fibration*) であるとは, p が任意の CW複体に対し CHP を持つことと定義する。また $p: E \to B$ が ***Hurewicz*ファイバー空間** (*Hurewicz fibration*) であるとは, p が任意の位相空間に対し CHP を持つことであると定義する。

いづれの場合も, ファイバー束の場合にならって, $x \in B$ に対し $p^{-1}(x)$ を x 上の **ファイバー** と言う。

系 ?? より次を得る。

系 1.2.3. *ファイバー束は Serre ファイバー空間である。*

証明. 系 ?? より, ファイバー束はパラコンパクト Hausdorff 空間に対し CHP を持つが, CW複体はパラコンパクト Hausdorff である。 □

注意 1.2.4. CW複体がパラコンパクト Hausdorff であることの証明は, 例えば Lundell と Weingram の本 [LW69] にある。 日本語の本なら, 小松, 中岡, 菅原の本 [小中菅67] に書かれている。

よって Serre ファイバー空間はファイバー束と Hurewicz ファイバー空間の両方の一般化となっている。 実際にこれが本質的な一般化であることを見るために, ファイバー束ではない Hurewicz ファイバー空間, よって Serre ファイバー空間の例を見よう。

例 1.2.5. $E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0\le y\le x\le 1\right\}$ とし $B=[0,1]$ とする。

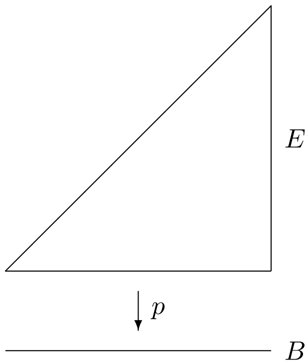


図 1.1: ファイバー束ではないファイバー空間

写像 $p:E\to B$ を x軸への射影 $p(x,y)=x$ で定義するとき, これが Hurewicz ファイバー空間であることを示そう。

まず任意の空間 X と連続写像

$$\begin{aligned} H &: X\times I \longrightarrow B \\ f &: X \longrightarrow E \end{aligned}$$

で次の図式を可換にするものを考える。

$$\begin{tikzcd} X\times\{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ X\times I \arrow[r, "H"] & B \end{tikzcd}$$

p が X に対し CHP を持つことを示すためには, 上の図式にはまる写像

$$\widetilde{H} : X \times I \longrightarrow E$$

を見つけなければならない。そのために, まず, $x \in X$ に対し

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x))$$

と書く。そして $(x,t) \in X \times I$ に対し

$$\widetilde{H}(x,t) = (H(x,t), \min\{H(x,t), f_2(x)\})$$

とおくと, 明らかに $\widetilde{H}$ は連続で, 上の図式を可換にする。よって $p : E \to B$ は Hurewicz ファイバー空間である。

しかし, これはファイバー束ではない。もしこれがファイバー束なら, 各点の上のファイバーは全て同相であるはずであるが,

$$\begin{aligned} p^{-1}(0) &= \{(0,0)\} \\ p^{-1}(1) &= \{1\} \times [0,1] \end{aligned}$$

であり 0 上のファイバーと 1 上のファイバーは異なる (同相ではない)。よって Hurewicz ファイバー空間であるがファイバー束ではない例を得た。 □

次は非常に重要な例である。

定義 1.2.6. X を基点 $*$ を持つ基点つき空間とする。X 上の $*$ を基点とする **パス空間** (*path space*) PX を

$$PX = \{\omega : I \to X \mid \text{連続}, \omega(0) = *\}$$

で定義する。

PX には $\mathrm{Map}(I,X)$ の部分空間として位相を入れる。ここで $\mathrm{Map}(I,X)$ にはコンパクト開位相が入っていた[1]ことを思い出そう。

命題 1.2.7. *写像 $p : PX \to X$ を $p(\omega) = \omega(1)$ で定義すると, これは連続であり p は Hurewicz ファイバー空間になる。*

証明. p の連続性は後回しにしよう。p が CHP を持つことを示すために, 次の可換な図式

$$\begin{CD} Y \times \{0\} @>{f}>> PX \\ @VVV @VV{p}V \\ Y \times I @>{H}>> X \end{CD} \tag{1.1}$$

[1] Definition ??

があったとして, H のリフト

$$\widetilde{H} : Y \times I \longrightarrow PX$$

を見つけよう。まず図式 (1.1) が可換であるという意味を考える。各 $y \in Y$ に対し, $f(y) \in PX$ は X 内の道であり, $H(y,t)$ で t を動かしたとき, つまり

$$\mathrm{ad}(H)(y) : I \longrightarrow X$$

も X 内の道である。図式 (1.1) が可換であることより,

$$H(y,0) = p(f(y)) = f(y)(1)$$

が成り立つ。つまり, これは道 $f(y)$ の終点が道 $\mathrm{ad}(H)(y)$ の始点と一致している, ということである。 よってこの二つの道をつなぐことができる。この道を $f(y) * \mathrm{ad}(H)(y)$ と書くことにする。

$$(f(y) * \mathrm{ad}(H)(y))(t) = \begin{cases} f(y)(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H(y, 2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

絵で描けば, 図1.2のようになる。

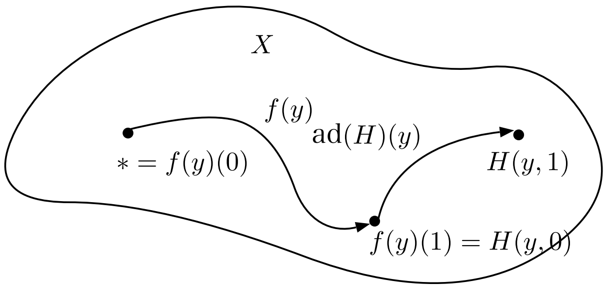


図 1.2: 道の結合

H のリフトであるホモトピー

$$\widetilde{H} : Y \times I \longrightarrow PX$$

の満たさなければならない条件は,

$$\begin{aligned} p(\widetilde{H}(y,t)) &= H(y,t) \\ \widetilde{H}(y,0) &= f(y) \end{aligned}$$

つまり, $\widetilde{H}(y,t)$ は終点が $H(y,t)$ である X 内の道であり, $\widetilde{H}(y,0) = f(y)$ であることである。 そのような道を作るのはそれほど難しくなく, $f(y)$ に $\mathrm{ad}(H)(y)$ を時刻 t の所でちょ

んぎった道をくっつければ良い。具体的には,

$$\widetilde{H}(y,t)(s) = \begin{cases} f(y)(s(1+t)) & 0 \le s \le \frac{1}{1+t} \\ H(y, s(1+t)-1) & \frac{1}{1+t} \le s \le 1 \end{cases}$$

とすればよい。これが図式

$$\begin{tikzcd} Y \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & PX \arrow[d, "p"] \\ Y \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, "\widetilde{H}"] & X \end{tikzcd}$$

を可換にすることは容易に確かめられる。

残ったのは p の連続性であるが, これは次の定理 ?? の系から分かる。 □

系 1.2.8. X が局所コンパクト *Hausdorff* ならば, 任意の空間 Y と $x \in X$ に対し

$$\mathrm{ev}_x(f) = f(x)$$

で定義された写像

$$\mathrm{ev}_x : \mathrm{Map}(X, Y) \longrightarrow Y$$

は連続である。

証明. $i_x : \{x\} \hookrightarrow X$ を包含写像とすると $\mathrm{ev}_x = \mathrm{ev} \circ i_x$ である。 □

注意 1.2.9. 上のファイバー空間 $p : PX \to X$ もファイバー束ではない。例えば, 基点上のファイバーは,

$$p^{-1}(*) = \{\omega : I \to X \mid \omega(0) = \omega(1) = *\}$$

であるが, 基点以外の点 x 上のファイバーは

$$p^{-1}(x) = \{\omega : I \to X \mid \omega(0) = *,\ \omega(1) = x\}$$

となる。絵で描けば, 図1.3のようになり, 明らかに「異なる」。

このように, ファイバー空間の場合にはファイバーどうしは同相とは限らない。 ファイバーの間の関係については系 1.4.10 で考える。

定義 1.2.10. X を基点付きの空間としたとき,

$$\Omega X = \{\omega : I \to X \mid \omega(0) = \omega(1) = *\}$$

とおき, X のループ空間 (*loop space*) という。$p : PX \to X$ は, 基点上のファイバーがループ空間 ΩX であり, 全空間がパス空間 PX なので, パス・ループ ファイバー空間 (*path-loop fibration*) と呼ばれる。

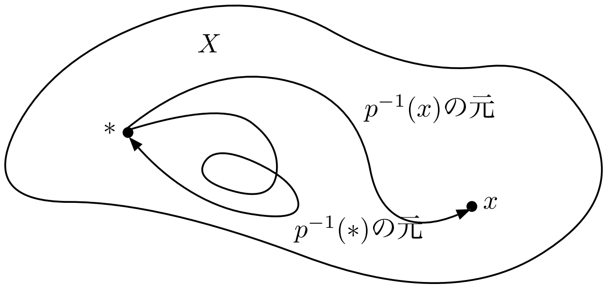


図 1.3: ファイバーの違い

注意 1.2.11. この二つの例で分かるように, 自然に現れる Serre ファイバー空間は Hurewicz ファイバー空間になっていることが多い。また, 第I部の議論から分かるように, トポロジーで実際に扱う空間は任意の位相空間であることはほとんどなく, パラコンパクト Hausdorff かつ局所コンパクト Hausdorff であるものである。 更に CW複体になっていることも多い。

そこで, これから本書では Serre ファイバー空間と Hurewicz ファイバー空間を区別せず, 単にファイバー空間と呼ぶことにする。 ただし Serre ファイバー空間を考えるときには, 全ての空間は CW複体であると仮定する。

1.3 ループ空間について

パス・ループ ファイバー空間が出てきたついでに, ループ空間についてもう少し詳しく調べよう。 もう一度定義を思い出すと, 基点付きの空間 X に対し X のループ空間は,

$$\begin{aligned} \Omega X &= \left\{\omega : I \to X \,\middle|\, \text{連続}, \omega(0) = \omega(1) = *\right\} \\ &= \left\{\omega : I \to X \,\middle|\, \text{連続}, \omega(\{0,1\}) = *\right\} \\ &= \left\{\omega : I \to X \,\middle|\, \text{連続}, \omega(\partial I) = *\right\} \end{aligned}$$

であった。もちろん位相は $\mathrm{Map}(I, X)$ の部分空間としての位相である。 ∂I を一点に持っていく写像を与えることと, ∂I をつぶしたところからの写像を与えることは同じだから,

$$\begin{aligned} \Omega X &= \left\{\omega : I/\partial I \to X \,\middle|\, \text{連続}, \omega(*) = *\right\} \\ &= \left\{\omega : S^1 \to X \,\middle|\, \text{連続}, \omega(*) = *\right\} \end{aligned}$$

とも書ける。つまり X 上のループ空間とは, S^1 から X への基点を基点に写す連続写像全体の成す空間のことである。 ここで, 第I部の定義 ?? を思い出そう。

X, Y を基点付き空間とし, 連続写像 $f : X \to Y$ が $f(*) = *$ をみたすとき, f を基点を保つ写像 (base-point preserving map) 或いは基点付き写像 (based map) と言ったのだっ

た。基点を保つ写像全体の集合を

$$\mathrm{Map}_*(X,Y)=\left\{f:X\to Y \,\middle|\, \text{連続},\ f(*)=*\right\}$$

と書いたが, そこでは位相は定義しなかった。$\mathrm{Map}_*(X,Y)$ は $\mathrm{Map}(X,Y)$ の部分集合だから, ここで部分空間として位相を入れて位相空間と考える。

この記号を使えば, 位相空間として

$$\Omega X=\mathrm{Map}_*(S^1,X)$$

と書ける。

さてループ空間の持つ最も重要な性質の一つは, 積を持つことである。

定義 1.3.1. X を基点付きの空間とし

$$\Omega X=\left\{\omega:I\to X \,\middle|\, \text{連続},\ \omega(\partial I)=*\right\}$$

と考える。写像

$$\mu:\Omega X\times\Omega X\longrightarrow\Omega X$$

を $\omega_1,\omega_2\in\Omega X$ に対し

$$\mu(\omega_1,\omega_2)(t)=\begin{cases}\omega_1(2t) & 0\le t\le\frac{1}{2}\\ \omega_2(2t-1) & \frac{1}{2}\le t\le 1\end{cases}$$

で定義 しΩX のループ積 (*loop sum*) という。$\mu(\omega_1,\omega_2)=\omega_1*\omega_2$ と書くこともある。

μ は位相空間の間の写像だから, 連続になって欲しい。

補題 1.3.2. μ は連続である。

証明. ΩX は $\mathrm{Map}(I,X)$ の部分空間として位相が入っていたから, まず $\mathrm{Map}(I,X)$ の位相, つまりコンパクト開位相の定義[2]を思い出す。$A\subset I$, $B\subset X$ に対し,

$$W(A,B)=\{\omega:I\to X\,|\,\omega(A)\subset B\}$$

とおくとき, $\mathrm{Map}(I,X)$ の準基底は,

$$\left\{W(K,U)\,\middle|\,K\subset I:\text{コンパクト},U\subset X:\text{開}\right\}$$

で与えられていた。

$$\overline{W}(K,U)=W(K,U)\cap\Omega X$$

とおくと

$$\left\{\overline{W}(K,U)\,\middle|\,K\subset I:\text{コンパクト},U\subset X:\text{開}\right\}$$

[2]第I部定義 2.3.4

が ΩX の準基底となる。ところが単位区間 I のコンパクト部分集合 K は, いつも有限個の閉区間の disjoint union になっている。

$$K = \coprod_{i=1}^{n} [t_i, t_i']$$

また

$$W(\coprod_{i=1}^{n}[t_i, t_i'], U) = \bigcap_{i=1}^{n} W([t_i, t_i'], U)$$

だから結局 ΩX の準基底は

$$\left\{ \overline{W}([s,t],U) \,\middle|\, 0 \le s < t \le 1, U \subset X : \text{開} \right\}$$

で与えられる。よって μ の連続性を示すためには, 開集合 $U \subset X$ に対し

$$\mu^{-1}\left(\overline{W}([s,t],U)\right) = \{(\omega_1,\omega_2) \in \Omega X \times \Omega X \mid \mu(\omega_1,\omega_2)([s,t]) \subset U\}$$

が $\Omega X \times \Omega X$ の中で開であることを示せば良い。 そのために $\mu^{-1}(\overline{W}([s,t],U))$ から (ω_1,ω_2) を取り, その点の $\mu^{-1}(\overline{W}([s,t],U))$ 内での開近傍を見つける。μ の定義から三つの場合に分けて考える。

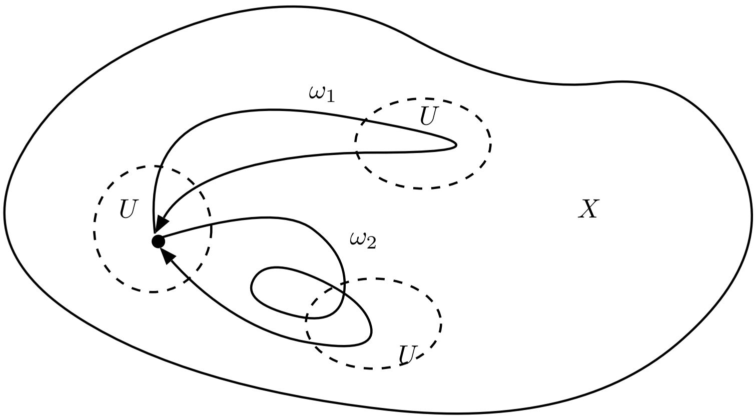


図 1.4: ループの結合の連続性

1. $\frac{1}{2} \in [s,t]$ の場合。 $\mu(\omega_1,\omega_2)([s,t]) \subset U$ より

$$\omega_1([2s,1]) \subset U \text{ かつ } \omega_2([0,2t-1]) \subset U$$

よって $\overline{W}([2s,1],U) \times \overline{W}([0,2t-1],U)$ は (ω_1,ω_2)の$\mu^{-1}(\overline{W}([s,t],U))$ 内での開近傍である。

2. $t < \frac{1}{2}$ の場合。 $\mu(\omega_1, \omega_2)([s, t]) \subset U$ より

$$\omega_1([2s, 2t]) \subset U$$

よって $\overline{W}([2s, 2t], U) \times \Omega X$ は (ω_1, ω_2)の$\mu^{-1}(\overline{W}([s, t], U))$ 内での開近傍である。

3. $\frac{1}{2} < s$ の場合。上と同様に $\Omega X \times \overline{W}([2s-1, 2t-1])$ が (ω_1, ω_2) の $\mu^{-1}(\overline{W}([s, t], U))$ 内での開近傍である。

これで μ が連続であることが示された。 □

μ を積というからには, μ により ΩX が位相群になりそうなのであるが残念ながらそうではない。 位相群になるためには, 結合律と単位元, 逆元の存在が必要であるが, ΩX はそのどれもみたさないのである。 まず結合律からみてみよう。

$\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \Omega X$ に対し,

$$\begin{aligned}
((\omega_1 * \omega_2) * \omega_3)(t) &= \begin{cases} (\omega_1 * \omega_2)(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \omega_3(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \omega_1(4t) & 0 \le t \le \frac{1}{4} \\ \omega_2(4t-1) & \frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2} \\ \omega_3(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \\
(\omega_1 * (\omega_2 * \omega_3))(t) &= \begin{cases} \omega_1(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ (\omega_2 * \omega_3)(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \omega_1(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \omega_2(4t-2) & \frac{1}{2} \le t \le \frac{3}{4} \\ \omega_3(4t-3) & \frac{3}{4} \le t \le 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

となる。 よって $((\omega_1 * \omega_2) * \omega_3)$ と $(\omega_1 * (\omega_2 * \omega_3))$ は異なる。しかし上の絵でみて分かるように, 違いは I の分割の仕方だけでありあまり本質的でないように思える。 実際ホモトピーを使えば, I の分割の割合など簡単に修正できる。つまり

$$((\omega_1 * \omega_2) * \omega_3) \simeq (\omega_1 * (\omega_2 * \omega_3))$$

である。更にこのホモトピーは $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ に無関係に取れるのである。

命題 1.3.3. μ を ΩX の積とすると

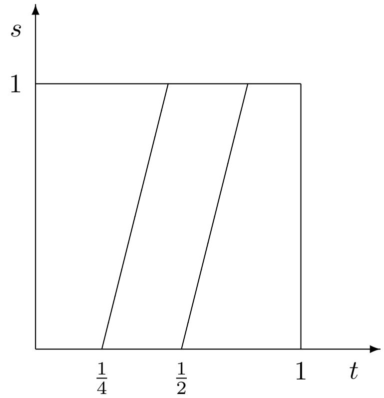
$$\mu \circ (id \times \mu) \simeq \mu \circ (\mu \times id)$$

である。

証明. $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \Omega X$ に対し $((\omega_1 * \omega_2) * \omega_3)$ と $(\omega_1 * (\omega_2 * \omega_3))$ の間のホモトピー

$$H(\omega_1, \omega_2, \omega_3) : I \times I \longrightarrow X$$

をつくる。$((\omega_1 * \omega_2) * \omega_3)$ に関する I の分割を $(\omega_1 * (\omega_2 * \omega_3))$ に関する I の分割に連続的に変形すれば良いのだから, 絵で描けば



となる。ここで s がホモトピーのパラメータで, t はループのパラメータである。左側の直線の方程式は,

$$s = 4t - 1$$

であり, 右側の直線はそれを $\frac{1}{4}$ だけ t 軸に沿って平行移動したものだから, 求めるホモトピーは

$$H(\omega_1, \omega_2, \omega_3)(t, s) = \begin{cases} \omega_1(\frac{4}{s+1}t) & 0 \leq t \leq \frac{s+1}{4} \\ \omega_2(4t - s - 1) & \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4} \\ \omega_3(\frac{4}{2-s}(t - \frac{s+2}{4})) & \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

で与えられる。各 s に対し $H(\omega_1, \omega_2, \omega_3)(-, s)$ が ΩX の元, つまり

$$H(\omega_1, \omega_2, \omega_3)(\partial I, s) = *$$

であることを確かめなければならないが, それはほとんど明らかである。次に

$$\widetilde{H}(\omega_1, \omega_2, \omega_3; s)(t) = H(\omega_1, \omega_2, \omega_3)(s, t)$$

とおいたときに

$$\widetilde{H} : \Omega X \times \Omega X \times \Omega X \times I \longrightarrow \Omega X$$

が連続であることを確かめなければならない。これは明らかではないが, 面倒くさいので省略する。 □

これで μ は結合律をみたさないが, 結合律の定義で, 「$=$」を「$\simeq$」に置き換えたものをみたしていることが分かった。 逆元や単位元についても, 位相群の定義で「$=$」を「$\simeq$」に置き換えたものが成り立っていそうである。 実際

$$\nu : \Omega X \longrightarrow \Omega X$$

を $\nu(\omega)(t)=\omega(1-t)$, $e\in\Omega X$ を $e(t)=*$ で定義すると次のことが成り立つ。

命題 1.3.4. ν は連続であり,

$$\begin{aligned} \mu\circ(id\times\nu) &\simeq e \qquad (1.2)\\ \mu\circ(\nu\times id) &\simeq e\\ \mu\circ(id\times e) &\simeq id\\ \mu\circ(e\times id) &\simeq id \end{aligned}$$

である。

証明. ν の連続性は演習問題とする。μ の連続性の証明よりずっと易しいはずである。 また四つのホモトピーの内のいちばん上のものだけ証明する。残りは, 演習問題とする。

(1.2) を証明するために, $\omega\in\Omega X$ に対し $\omega*\nu(\omega)$ と e の間のホモトピーを構成する。

$$(\omega*\nu(\omega))(t)=\begin{cases}\omega(2t) & 0\le t\le\frac{1}{2}\\ \omega(2-2t) & \frac{1}{2}\le t\le 1\end{cases}$$

だからこれは一度 ω に沿って回り, その後逆向きに ω に沿って戻ってくる道である。これと e, つまりじっとその場にとどまっている道との間のホモトピーを作るためには, 途中で戻ってくればよい。

具体的には,

$$H(\omega):I\times I\longrightarrow X$$

を

$$H(\omega)(t,s)=\begin{cases}\omega(2ts) & 0\le t\le\frac{1}{2}\\ \omega((2-2t)s) & \frac{1}{2}\le t\le 1\end{cases}$$

で定義すれば, これは $\omega*\nu(\omega)$ と e の間のホモトピーを与える。

$$\widetilde{H}:\Omega X\times I\longrightarrow\Omega X$$

を

$$\widetilde{H}(\omega,s)(t)=H(\omega)(t,s)$$

で定義すると, これが求めるホモトピーである。 □

演習問題 1.3.5. ν の連続性を証明し残りの三つのホモトピーを構成せよ。

注意 1.3.6. §?? での群の定義 (定義??) の時には, $\mu\circ(id\times\mu)=\mu\circ(\mu\times id)$ などの式ではなく図式の可換性により定義した。 一般に写像の等式は可換図式で表せるわけであるが, 今のような, 「写像がホモトピック」という場合も, 図式により視覚化したほうが分かりやすい。そこで, 例えば,

$$\mu\circ(id\times\mu)\simeq\mu\circ(\mu\times id)$$

が成り立つとき, 図式

$$\begin{array}{ccc} \Omega X \times \Omega X \times \Omega X & \xrightarrow{\mu \times id} & \Omega X \times \Omega X \\ {\scriptstyle id \times \mu} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \mu} \\ \Omega X \times \Omega X & \xrightarrow{\mu} & \Omega X \end{array}$$

がホモトピー可換 (*homotopy commutative*) であるという。

これまでのことで, ΩX が位相群の定義で, 「$=$」を「$\simeq$」に置き換えたものをみたしていることが分かった。 そのようなものは, よく出てくるので名前がついている。

定義 1.3.7. 基点付き空間 X と連続写像

$$\begin{aligned} \mu &: X \times X \longrightarrow X \\ \nu &: X \longrightarrow X \end{aligned}$$

で次の五つの条件をみたすものが存在するとき, これを *Hopf*空間 (*Hopf space* 或いは *H-space*) という。

$$\mu \circ (id \times \mu) \simeq \mu \circ (\mu \times id) \tag{1.3}$$

$$\mu \circ (id \times \nu) \simeq * \tag{1.4}$$

$$\mu \circ (\nu \times id) \simeq * \tag{1.5}$$

$$\mu \circ (id \times *) \simeq id \tag{1.6}$$

$$\mu \circ (* \times id) \simeq id \tag{1.7}$$

注意 1.3.8. 普通の本や論文での Hopf空間の定義では (1.4) と (1.5) を仮定しないことが多い。更に一般には (1.3) も仮定しない場合が多い。 (1.3)は homotopy associativityと呼ばれ, Hopf空間を研究する際に鍵となる性質である。 (1.3) と本当の結合法則との間には大きなギャップがあり, それについて はStasheffの有名な仕事 [Sta63] がある。 また積を持つが (1.3) をみたさないものとして S^7 のような空間がある。実数, 複素数, 四元数, Cayley数の積に対応してそれぞれの単位球面 S^0, S^1, S^3, S^7 に積が誘導され, S^7 も S^1, S^3 などとまとめて扱いたいのであるが, S^7 は (1.3) を満たさないので, Hopf空間の定義には (1.3) を入れないのである。 なお有限次元実ベクトル空間で内積を保つ積を持つものが, 上の四つに限るというのは有名な Adams の結果である (Hopf invariant one の元の非存在 [Ada60])。

(1.4) と (1.5) を仮定しないことについては次の事実による。

定理 1.3.9. X が弧状連結な *CW*複体で, 連続写像

$$\mu : X \times X \longrightarrow X$$

が上の五つの条件の内 *(1.4), (1.5)* 以外ものを満足するならば, *(1.4), (1.5)* をみたす連続写像

$$\nu : X \longrightarrow X$$

が存在する。

証明. 省略, というよりここでは証明できない。証明を知りたい読者は, 三村の本 [三村護86] の6ページを見られたい。 □

この定義を使うと ΩX は Hopf空間であると言える。 Hopf空間がかなり位相群に近いものであることは分かったが, ホモトピーというのは曖昧で扱いにくい。 そこで ΩX を本当の位相群に出来ないかというのは自然な疑問である。 J.C. Moore は実際に本当に結合律をみたすループ空間のモデルを作った。

定義 1.3.10. X を基点付き空間とするとき, X の*Moore* ループ空間 $\Omega_M X$ を

$$\Omega_M X = \{(\omega, \ell) \in \mathrm{Map}([0,\infty), X) \times [0,\infty) \,|\, \omega(0) = *, \omega([\ell,\infty)) = *\}$$

で定義する。また

$$\mu_M : \Omega_M X \times \Omega_M X \longrightarrow \Omega_M X$$

を $(\omega_1, \ell_1), (\omega_2, \ell_2) \in \Omega_M X$ に対し

$$\mu_M(\omega_1, \ell_1; \omega_2, \ell_2) = (\bar{\mu}(\omega_1, \omega_2), \ell_1 + \ell_2)$$

で定義する, ここで

$$\bar{\mu}(\omega_1, \omega_2)(t) = \begin{cases} \omega_1(t) & 0 \le t \le \ell_1 \\ \omega_2(t - \ell_1) & \ell_1 \le t \end{cases}$$

である。

命題 1.3.11. *μ_M は結合律をみたす。また e を基点にじっと止まっているループとすると, $(e, 0)$ が単位元になる。つまり, $\Omega_M X$ は位相モノイド[3]になる。*

演習問題 1.3.12. この命題を証明せよ。

このように $\Omega_M X$ 上の μ_M は, 非常に位相群に近い性質を持つ。 あと残るは逆元の存在だけである。 ここまで良い性質を持つと逆元も持つのではないかと思いたくなるが, 残念ながら, 容易に分かるように μ_M は逆元を持たない。

ところで ΩX と $\Omega_M X$ の間には次の関係がある。

[3]定義 ??

命題 1.3.13. 任意の基点付き空間 X に対し

$$r : \Omega_M X \longrightarrow \Omega X$$

を

$$r(\omega, \ell)(t) = \omega(\ell t)$$

で定義すると, r は積を保ち

$$i : \Omega X \longrightarrow \Omega_M X$$

を

$$i(\omega) = (\omega, 1)$$

で定義すると

$$\begin{aligned} r \circ i &= id_{\Omega X} \\ i \circ r &\simeq id_{\Omega_M X} \end{aligned}$$

である。

証明. r が積を保つ, つまり

$$\begin{CD} \Omega_M X \times \Omega_M X @>{\mu_M}>> \Omega_M X \\ @V{r \times r}VV @VV{r}V \\ \Omega X \times \Omega X @>{\mu}>> \Omega X \end{CD}$$

であることは容易に確かめられる。

$$r \circ i(\omega) = r(\omega, 1) = \omega = id_{\Omega X}(\omega)$$

であるから, あとは $i \circ r \simeq id_{\Omega_M X}$ であることを示せば良い。このホモトピー

$$H : \Omega_M X \times I \longrightarrow \Omega_M X$$

は

$$\begin{aligned} H(\omega, \ell; s) &= \left(h(\omega, \ell; s), \frac{\ell}{\ell(1-s)+s} \right) \\ h(\omega, \ell; s)(t) &= \omega((\ell(1-s)+s)t) \end{aligned}$$

で与えられる。 □

上の命題から ΩX と $\Omega_M X$ は同相ではないが, 同相に非常に近い関係にあることがわかる。実際, 二つの写像

$$\begin{aligned} r &: \Omega_M X \longrightarrow \Omega X \\ i &: \Omega X \longrightarrow \Omega_M X \end{aligned}$$

の関係は

$$\begin{aligned} r \circ i &= id_{\Omega X} \\ i \circ r &\simeq id_{\Omega_M X} \end{aligned}$$

であり, 同相の定義で「=」を「$\simeq$」に置き換えたものになっている。これまで見てきたように, 「=」を「$\simeq$」に置き換えることは重要であり, この関係も次のように定義される。

定義 1.3.14. 空間 X と Y がホモトピー同値 (*homotopy equivalent*) であるとは, 写像

$$\begin{aligned} f &: X \longrightarrow Y \\ g &: Y \longrightarrow X \end{aligned}$$

で

$$\begin{aligned} g \circ f &\simeq id_X \\ f \circ g &\simeq id_Y \end{aligned}$$

であるものが存在することである。このとき $X \simeq Y$ と書く。

またこのとき f, g をホモトピー同値写像 (*homotopy equivalence*) と言い, f は g のホモトピー逆写像 (*homotopy inverse*) また g は f のホモトピー逆写像であるという。

演習問題 1.3.15. ホモトピー同値という関係が同値関係であることを示せ。

演習問題 1.3.16. X が可縮であることと X が一点とホモトピー同値であることは同値であることを示せ。

この定義を用いると命題 1.3.13 は次のように述べられる。

系 1.3.17. 基点付き空間 X に対し, 命題 *1.3.13* の写像

$$r : \Omega_M X \longrightarrow \Omega X$$

は積を保つホモトピー同値である。

1.4 ファイバー束とファイバー空間の比較

再びファイバー空間の話に戻ろう。§1.2ではファイバー束の一般化であるファイバー空間を定義し, ファイバー空間であるがファイバー束でない例もいくつか見た。さてそれではファイバー束とファイバー空間は一体どれくらい違い, またどれくらい共通点を持つものだろうか。例えば, ファイバー束の基本的性質であった

- ホモトピー群の長い完全列

1. ファイブレーション

- ホモトピー不変性
- 分類定理

などがファイバー空間についても成り立つであろうか。本節では，第??章まででで見てきたファイバー束の性質と比較しながら，ファイバー空間の持つ性質を見ていくことにしよう。

ホモトピー群の長い完全列と分類定理は後回しにして，ファイバー空間の ホモトピー不変性について考えよう。 そのためにはまずファイバー空間のプルバックを定義しなければならないが，これにはファイバー束のプルバックの定義がそのまま使える。

定義 1.4.1. ファイバー空間

$$p : E \longrightarrow B$$

と連続写像

$$f : X \longrightarrow B$$

に対し

$$f^*(E) = \{(x, e) \in X \times E \mid f(x) = p(e)\}$$

とし

$$f^*(p) : f^*(E) \longrightarrow X \tag{1.8}$$

を第一成分への射影とするとき (1.8) を p の f によるプルバックという。

注意 1.4.2. この定義から分かるように，プルバックを定義するためには，p がファイバー束やファイバー空間である必要はない。実際，より一般に，任意の連続写像

$$\begin{aligned} f &: X \longrightarrow Z \\ g &: Y \longrightarrow Z \end{aligned}$$

に対し

$$X \times_Z Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$$

とおき，fとgによるXとYのZ上のプルバック，あるいは**ファイバー積** (*fiber product*) という。これは，ファイバー束やファイバー空間だけでなく，様々なところで必要となる空間の構成法である。

ファイバー束の時のように，ファイバー空間のプルバックはファイバー空間になる。

命題 1.4.3. ファイバー空間

$$p : E \longrightarrow B$$

と連続写像

$$f : X \longrightarrow B$$

に対し
$$f^*(p) : f^*(E) \longrightarrow X$$
は, またファイバー空間になる。

証明. ファイバー空間の定義に従って $f^*(p)$ が CHP を持つことを示す。 つまり可換な図式
$$\begin{tikzcd} Z \times \{0\} \arrow[r, "h"] \arrow[d] & f^*(E) \arrow[d, "f^*(p)"] \\ Z \times I \arrow[r, "H"] & X \end{tikzcd}$$
に対し右斜め上向きの写像
$$\widetilde{H} : Z \times I \longrightarrow f^*(E)$$
で図式
$$\begin{tikzcd} Z \times \{0\} \arrow[r, "h"] \arrow[d] & f^*(E) \arrow[d, "f^*(p)"] \\ Z \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dotted, "\widetilde{H}"] & X \end{tikzcd}$$
の上と下の三角を可換にするものを構成したい。 上の図式の右側にプルバックの図式をくっつけると
$$\begin{tikzcd} Z \times \{0\} \arrow[r, "h"] \arrow[d] & f^*(E) \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "f^*(p)"] & E \arrow[d, "p"] \\ Z \times I \arrow[r, "H"] & X \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$
という図式を得る。一番外側の四角を考えると
$$\begin{tikzcd} Z \times \{0\} \arrow[r, "\bar{f} \circ h"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ Z \times I \arrow[r, "f \circ H"] & B \end{tikzcd}$$
となる。p はファイバー空間であるから, CHP により
$$G : Z \times I \longrightarrow E$$
で
$$\begin{aligned} G|_{Z \times \{0\}} &= \bar{f} \circ h \\ p \circ G &= f \circ H \end{aligned}$$
であるものが存在する。この G を用いて $(z,t) \in Z \times I$ に対し
$$\widetilde{H}(z,t) = (H(z,t), G(z,t))$$

とおく。まず $\widetilde{H}(z,t) \in f^*(E)$ であることを言わなければならないが, それは

$$p \circ G = f \circ H$$

よりすぐに分かる。また, この $\widetilde{H}$ が求める写像であることも容易に確かめられる。 □

これでファイバー空間のホモトピー不変性を調べる準備が出来た。

$$p : E \longrightarrow B$$

をファイバー空間とし

$$f_0, f_1 : X \longrightarrow B$$

を連続写像でホモトピック $f_0 \simeq f_1$ であるものとしたとき, $f_0^*(E)$ と $f_1^*(E)$ の関係を調べたい。p がファイバー束の時, この二つのファイバー束は同型になり, よって空間として $f_0^*(E)$ と $f_1^*(E)$ は同相になる。 しかしファイバー空間の場合はそこ迄良い結果は得られない。

例 1.4.4. 例 1.2.5 を思いだそう。

$$\begin{aligned} E &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq y \leq x \leq 1\} \\ B &= [0,1] \end{aligned}$$

であり, 射影

$$p : E \longrightarrow B$$

は $p(x,y) = x$ で与えられていた。

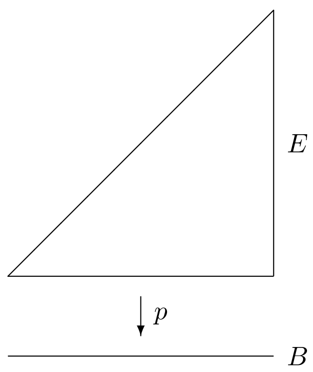


図 1.5: 例 1.2.5 のファイバー空間

X を一点 $\{*\}$ とし

$$\begin{aligned} f_0 &: X \longrightarrow B \\ f_1 &: X \longrightarrow B \end{aligned}$$

を $f_0(*) = 0$, $f_1(*) = 1$ で定義するとき, $H(*, t) = t$ というホモトピー

$$H : X \times I \longrightarrow B$$

で f_0 と f_1 はホモトピックであるが,

$$\begin{aligned} f_0^*(E) &= \{(0,0)\} \\ f_1^*(E) &= \{1\} \times I \end{aligned}$$

であり $f_0^*(E)$ と $f_1^*(E)$ は同相ではない。 □

この例から分かるように, ファイバー空間の場合はホモトピックな写像でプルバックを取っても, 全空間として同じ空間が得られるとは限らない。しかし $f_0^*(E)$ と $f_1^*(E)$ の間に何らかの関係があるはずである。実は, ファイバー空間の場合にはこれらは互いにホモトピー同値になっている。 より正確には, ホモトピックな写像でプルバックしたファイバー空間には, ファイバーホモトピー同値という関係があるのであるが, それを述べるためにまずいくつかの定義が必要になる。

まず二つのファイバー空間を比較するために, ファイバー空間の間の写像が必要になる。 それには, ファイバー束のファイバーを保つ写像の定義をそのまま流用する。

定義 1.4.5. $p : E \to B$と$p' : E' \to B'$ をファイバー空間とする。

1. p から p' への**ファイバーを保つ写像** (*fiber-preserving map*), 或いは単に**ファイバー空間の写像**, とは二つの写像

$$\begin{aligned} \tilde{f} &: E \longrightarrow E' \\ f &: B \longrightarrow B' \end{aligned}$$

で

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"] & E' \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, "f"] & B' \end{tikzcd}$$

を可換にするものである。

2. $(f, \tilde{f})$ と $(g, \tilde{g})$ が p から p' へのファイバー空間の写像であるとき, $(f, \tilde{f})$ から $(g, \tilde{g})$ への**ファイバーホモトピー** (*fiber homotopy* または *fiberwise homotopy*) とは, f から g へのホモトピー

$$H : B \times I \longrightarrow B'$$

と $\tilde{f}$ から $\tilde{g}$ へのホモトピー

$$\tilde{H} : E \times I \longrightarrow E'$$

1. ファイブレーション

で

$$\begin{tikzcd} E \times I \arrow[r, "\tilde{H}"] \arrow[d, "p \times id"] & E' \arrow[d, "p'"] \\ B \times I \arrow[r, "H"] & B' \end{tikzcd}$$

を可換にするものである。

3. このとき $(f, \tilde{f})$ と $(g, \tilde{g})$ はファイバーホモトピック (fiber homotopic または fiberwise homotopic) であるという。

4. 特に $B = B'$ で $f = g = 1_B$ の時, $(1_B, \tilde{f})$ と $(1_B, \tilde{g})$ が

$$H(x, t) = x$$

であるようなファイバーホモトピー $(H, \tilde{H})$ でファイバーホモトピックなら

$$\tilde{f} \underset{B}{\simeq} \tilde{g}$$

という記号を用いることにする。

5. 最後に $p : E \to B$と$p' : E \to B$ が底空間が共通なファイバー空間であるとき, これらがファイバーホモトピー同値 (*fiber homotopy equivalent* または fiberwise homotopy equivalent) であるとはファイバー空間の写像

$$\begin{aligned} (id_B, f) &: (B, E) \longrightarrow (B, E') \\ (id_B, g) &: (B, E') \longrightarrow (B, E) \end{aligned}$$

で

$$\begin{aligned} g \circ f &\underset{B}{\simeq} id_E \\ f \circ g &\underset{B}{\simeq} id_{E'} \end{aligned}$$

であるものが存在することである。このとき

$$(B, E) \underset{B}{\simeq} (B, E')$$

或いは単に

$$E \underset{B}{\simeq} E'$$

と書く。

注意 1.4.6. すぐに分かるように $E \underset{B}{\simeq} E'$ ならば, 空間として $E \simeq E'$ である。

上で定義したファイバー空間の間のファイバーホモトピー同値という関係は, ファイバー束の同型の定義 (定義 ??) で $=$ を $\underset{B}{\simeq}$ で置き換えたものではないが, 命題 ?? の対称律の証明から $\underset{B}{\simeq}$ を $=$ で置き換えたものをファイバー束の同型の定義と思ってもよいのである。

このファイバーホモトピー同値という関係を使うと, ファイバー空間のホモトピー不変性がうまく記述できる。

定理 1.4.7. $p : E \to B$ をファイバー空間とし

$$f, g : X \longrightarrow B$$

を互いにホモトピック $f \simeq g$ な写像とする。すると f と g によるプルバックは互いにファイバー ホモトピー同値である。

$$(X, f^*(E)) \underset{X}{\simeq} (X, g^*(E))$$

証明. 証明のアイデアは, 誰でも思いつくことではあるが, f と g の間のホモトピーをリフトして $f^*(E)$ と $g^*(E)$ の間のファイバーホモトピー同値を作ることである。

$H : X \times I \to B$ を f から g へのホモトピーとする。よって

$$\begin{aligned} i_0 &: X \hookrightarrow X \times I \\ i_1 &: X \hookrightarrow X \times I \end{aligned}$$

をそれぞれ X の $X \times \{0\}$ と $X \times \{1\}$ への包含写像とすると

$$\begin{aligned} f &= H \circ i_0 \\ g &= H \circ i_1 \end{aligned}$$

であり, 次の可換な図式を得る。

$$\begin{tikzcd}
f^*(E) \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"] & B \arrow[d, "\|"] \\
X \times I \arrow[r, "H"] & B
\end{tikzcd}$$

また

$$\begin{tikzcd}
f^*(E) \arrow[rr, "="] \arrow[dd, "i_0"] & & f^*(E) \arrow[d, "p"] \\
& & X \arrow[d, "i_0"] \\
f^*(E) \times I \arrow[rr, "p\times id"] & & X \times I
\end{tikzcd}$$

も可換である。二つ合わせれば

$$\begin{tikzcd}
f^*(E) \arrow[rr] \arrow[d, "i_0"] & & E \arrow[d, "p"] \\
f^*(E) \times I \arrow[r, "p\times id"] & X \times I \arrow[r, "H"] & B
\end{tikzcd}$$

これは, 丁度 CHP が使える状況になっている。よって右斜め上向きのホモトピー $\widetilde{H}$ が存在する。

$$\begin{tikzcd}
f^*(E) \arrow[rr] \arrow[d, "i_0"] & & E \arrow[d, "p"] \\
f^*(E) \times I \arrow[r, "p\times id"] \arrow[urr, dotted, "\widetilde{H}"] & X \times I \arrow[r, "H"] & B
\end{tikzcd}$$

下の三角を描き換えれば,

$$\begin{tikzcd}
f^*(E) \times I \arrow[r, "\widetilde{H}"] \arrow[d, "p\times id"] & E \arrow[d, "p"] \\
X \times I \arrow[r, "H"] & B
\end{tikzcd} \tag{1.9}$$

つまり $(H, \widetilde{H})$ はファイバーを保つ写像になっている。これで H のリフト $\widetilde{H}$ ができた。これを用いて $f^*(E)$ と $g^*(E)$ の間のファイバーホモトピーを作ろう。

写像

$$h : f^*(E) \longrightarrow X \times E$$

を

$$h(x, e) = (x, \widetilde{H}(x, e, 1))$$

で定義する。すると (1.9) の可換性から

$$p(\widetilde{H}(x, e, 1)) = H(x, 1) = g(x)$$

となり $h(x,e) \in g^*(E)$ である。これでファイバー空間の写像

$$\begin{tikzcd} f^*(E) \arrow[r, "h"] \arrow[d] & g^*(E) \arrow[d] \\ X \arrow[r, "="] & X \end{tikzcd}$$

ができた。次に $H'(x,t) = H(x, 1-t)$ とおき, H の代わりに H' を用いれば

$$\begin{tikzcd} g^*(E) \arrow[r, "h'"] \arrow[d] & f^*(E) \arrow[d] \\ X \arrow[r, "="] & X \end{tikzcd}$$

が得られる。ここで

$$\widetilde{H}' : g^*(E) \times I \longrightarrow E$$

を H' のリフトとして $h'(x,e) = (x, \widetilde{H}'(x,e,1))$ である。

これで $f^*(E)$ から $g^*(E)$ へとその逆向きの写像が出来たので, 後は

$$\begin{aligned} h \circ h' &\underset{X}{\simeq} 1_{g^*(E)} \\ h' \circ h &\underset{X}{\simeq} 1_{f^*(E)} \end{aligned}$$

を示せば良い。これらのファイバーホモトピーも CHP でつくる。まず

$$K = \partial I \times I \cup I \times \{0\}$$

とおき

$$F : f^*(E) \times K \longrightarrow E$$

を $x \in X, e \in E, s, t \in I$ に対し

$$\begin{aligned} F(x,e,0,t) &= \widetilde{H}(x,e,1-t) \\ F(x,e,1,t) &= \widetilde{H}'(h(x,e),t) \\ F(x,e,s,0) &= \widetilde{H}(x,e,1) \end{aligned}$$

で定義する。このとき

$$\begin{aligned} \widetilde{H}(x,e,1-0) &= \widetilde{H}(x,e,1) \\ \widetilde{H}'(h(x,e),0) &= \bar{f}(h(x,e)) \\ &= \widetilde{H}(x,e,1) \end{aligned}$$

だから F は well-defined で連続である。また次の図式は可換になる。

$$\begin{tikzcd}
f^*(E) \times K \arrow[r, "F"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\
f^*(E) \times I \times I \arrow[r, "G"] & B
\end{tikzcd}$$

ここで

$$G(x, e, s, t) = H'(x, t) = H(x, 1-t)$$

であり, 左の垂直な写像は K の $I \times I$ への包含写像で与えられるものである。

更に

$$(I \times I, K) \cong (I \times I, I \times \{0\}) \tag{1.10}$$

という対の同相写像があるから, 可換な図式

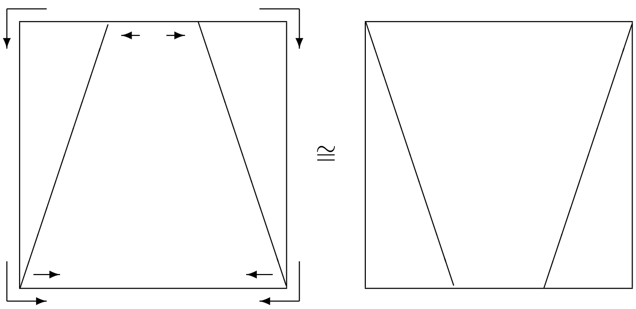


図 1.6: 対の同相写像

$$\begin{tikzcd}
f^*(E) \times I \times \{0\} \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & f^*(E) \times K \arrow[r, "F"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\
f^*(E) \times I \times I \arrow[r, "\cong"] & f^*(E) \times I \times I \arrow[r, "G"] & B
\end{tikzcd}$$

を得る。この図式のいちばん外側の四角が CHP を使う状況になっているが, 対の同相 (1.10) により内側の右側の四角に CHP を使ってもよい。 よって

$$\begin{tikzcd}
f^*(E) \times K \arrow[r, "F"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\
f^*(E) \times I \times I \arrow[r, "G"] \arrow[ur, dotted, "\widetilde{F}"] & B
\end{tikzcd}$$

という右斜め上向きのホモトピー $\widetilde{F}$ を得る。下の三角を描き直せば,

$$\begin{tikzcd}
f^*(E)\times I\times I \arrow[rr, "\widetilde{F}"] \arrow[d] & & E \arrow[d, "p"] \\
X\times I\times I \arrow[r, "\mathrm{pr}"] & X\times I \arrow[r, "H'"] & B
\end{tikzcd}$$

となる。ここで pr は真ん中の I を除く射影である。また上の三角より

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}(x,e,0,t) &= F(x,e,0,t)=\widetilde{H}(x,e,1-t)\\
\widetilde{F}(x,e,1,t) &= F(x,e,1,t)=\widetilde{H}'(h(x,e),t)
\end{aligned}$$

であることが分かる。そこで

$$\varphi : f^*(E)\times I \longrightarrow f^*(E)$$

を

$$\varphi(x,e,t)=(x,\widetilde{F}(x,e,t,1))$$

で定義すれば

$$\begin{aligned}
\varphi(x,e,0) &= (x,\widetilde{F}(x,e,0,1))\\
&= (x,\widetilde{H}(x,e,0))\\
&= (x,e)\\
\varphi(x,e,1) &= (x,\widetilde{F}(x,e,1,1))\\
&= (x,\widetilde{H}'(h(x,e),1))\\
&= h'(h(x,e))
\end{aligned}$$

となり, φ は $1_{f^*(E)}$ と $h'\circ h$ の間のファイバーホモトピーを与える。まったく同様にして

$$h\circ h' \underset{X}{\simeq} 1_{g^*(E)}$$

を得る。 □

系 1.4.8. B を弧状連結な空間とし, $p:E\to B$ をファイバー空間とするとき, 任意の点 $x,x'\in B$ に対し, x,x' 上のファイバーは互いにホモトピー同値

$$p^{-1}(x)\simeq p^{-1}(x')$$

証明. 上の定理で, $X=\{*\}$, $f(*)=x$, $g(*)=x'$ とする。すると

$$f,g : X\longrightarrow B$$

は連続写像である。また B が弧状連結であるから x と x' とを結ぶ B 内の道

$$\omega : I \longrightarrow B$$

があるが, これは f と g の間のホモトピーと考えられる。 よって定理より

$$f^*(E) \underset{X}{\simeq} g^*(E)$$

であるが

$$\begin{aligned} f^*(E) &= p^{-1}(x) \\ g^*(E) &= p^{-1}(x') \end{aligned}$$

より

$$p^{-1}(x) \simeq p^{-1}(x')$$

となる。 □

注意 1.4.9. $p : E \to B$ がファイバー束の時は, $x, x' \in B$ に対し同相

$$p^{-1}(x) \cong p^{-1}(x')$$

があった。上の系は, ファイバー束に対する $=$ あるいは $\cong$ が, ファイバー空間では $\simeq$ になっていることを示唆している。

これとよく似ているが少し違った次の結果も成り立つ。 証明は簡単なので読者に任せよう。

系 1.4.10. ファイバー空間 $p : E \to B$ と $p' : E' \to B$ がファイバーホモトピー同値

$$E \underset{B}{\simeq} E'$$

ならば, 任意の点 $x \in B$ に対し, x 上のファイバーは互いにホモトピー同値

$$p^{-1}(x) \simeq {p'}^{-1}(x)$$

である。

演習問題 1.4.11. これを証明せよ。

ファイバー束の定理 ?? に対応する結果もある。

系 1.4.12. B が一点 $b \in B$ に可縮な空間で, $p : E \to B$ がファイバー空間の時, $F = p^{-1}(b)$ とすると

$$B \times F \underset{B}{\simeq} E$$

である。

証明. $H: B \times I \to B$ を B を一点 b に縮めるホモトピーとする。よって $H|_{B\times\{0\}} = 1_B$ であり $H|_{B\times\{1\}}$ は b への定値写像 c_b である。定理 1.4.7 より

$$1_B^*(E) \underset{B}{\simeq} c_b^*(E)$$

であるが

$$1_B^*(E) = E$$

であり

$$\begin{aligned} c_b^*(E) &= \{(x,e) \in B \times E | c_b(x) = p(e)\} \\ &= \{(x,e) \in B \times E | b = p(e)\} \\ &= B \times F \end{aligned}$$

となる。 □

ファイバー束にならってこのようなファイバー空間に名前をつけよう。

定義 1.4.13. ファイバー空間 $p: E \to B$ は, $B \times F \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} B$ という形のファイバー空間とファイバーホモトピー同値の時, 自明 (*trivial*) であるという。ここで, pr_1 は第一成分への射影である。

ファイバー束の分類定理の証明の元になっていた, 被覆ホモトピー定理の証明では, 1の分割[4]の存在が鍵になっていた。Dold [Dol63] は, numerable な被覆の存在は, 定理 ?? を証明するためだけでなく, ファイバーホモトピー同値を構成するためにも使えることを示した。

定理 1.4.14. 連続写像の可換図式

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E' \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & B & \end{array}$$

を考える。B が *numerable*な被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を持ち, f が各 U_λ 上でファイバーホモトピー同値ならば, f はファイバーホモトピー同値になる。

証明. Dold の論文 [Dol63] の Theorem 3.3 を参照のこと。 □

注意 1.4.15. ここで, 写像 p と p' は任意の写像でよいことに注意する。

---

[4]定義 ??

1.5　任意の連続写像をファイバー空間に変形する

これまで見てきたように，またたびたび強調してきたように ファイバー束 について成り立つことで $=$ や $\cong$ を $\simeq$ や $\underset{B}{\simeq}$ などで置き換えると ファイバー空間 についての事実になる。 ファイバー空間はもともと CHP で定義されていたが，Hopf空間[5]が位相群の定義で $=$ を $\simeq$ で置き換えて定義されたように，ファイバー空間もファイバー束で $=$ を $\simeq$ で置き換えてできたものと考えても良いのである。 (少し無理があるが。)

このようにファイバー束とファイバー空間は多くの似通った点があるが，ファイバー空間には一つだけ決定的にファイバー束よりも優れた性質がある。 それは，任意の連続写像が，ホモトピーによる変形でファイバー空間になってしまうということである。 このため，ファイバー空間はホモトピー論ではファイバー束よりずっと有用なのである。 これをもっと正確に述べるために次の定義が必要になる。

定義 1.5.1. 連続写像 $f : X \to Y$ に対し，f の写像跡 (*mapping track*) E_f を

$$E_f = \{(x, \omega) \in X \times \mathrm{Map}(I, Y) \mid f(x) = \omega(0)\}$$

で定義する。また，写像

$$\begin{array}{rcl} p & : & E_f \longrightarrow Y \\ i & : & X \longrightarrow E_f \\ r & : & E_f \longrightarrow X \end{array}$$

を以下のように定義する:

$$\begin{array}{rcl} p(x,\omega) & = & \omega(1) \\ i(x) & = & (x, c_{f(x)}) \\ r(x,\omega) & = & x \end{array}$$

ここで $c_{f(x)}$ は $f(x)$ への定値写像である。

定理 1.5.2. 連続写像 $f : X \to Y$ について次のことが成り立つ:

1. $p : E_f \to Y$ はファイバー空間である。

2. i は図式

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & E_f \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ Y & \xrightarrow{=} & Y \end{array}$$

を可換にし $f \circ r \simeq p$ である。

[5]Definition 1.3.7

3. i と r は互いにホモトピー逆写像であり, $i \circ r$ と 1_{E_f}, $r \circ i$ と 1_X の間のホモトピー H, H' はそれぞれ

$$\begin{array}{ccc} E_f \times I & \xrightarrow{H} & E_f \\ \downarrow{\scriptstyle p\times id} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ Y \times I & \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} & Y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X \times I & \xrightarrow{H'} & X \\ \downarrow{\scriptstyle f\times id} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y \times I & \xrightarrow{pr_1} & Y \end{array}$$

を可換にするように取れる, ここで pr_1 は第一成分への射影である。

上の定理の内容を要約すれば, 任意の連続写像はファイバー空間にホモトピーで変形できるということである。 この操作は良く使うので名前をつける。

定義 1.5.3. 連続写像 $f : X \to Y$ から $p : E_f \to Y$ を作ることを f をファイバー空間で取り替えるという。

また $y \in Y$ に対し

$$F_{f,y} = p^{-1}(y)$$

と書き, f の y 上のホモトピーファイバー (*homotopy fiber*) と言う。Y が弧状連結の時には $F_{f,y}$ は y の取り方によらずホモトピー同値なので, y を省略し単に F_f と書くこともある。

定理 *1.5.2* の証明*.* 三つの内, 最初のものは少しややこしいので後回しにしよう。 二番目は簡単に分かるので省略する。 三番目を示すためにはホモトピーを見つけなければならないが, それはそんなに難しくない。$i \circ r$ と 1_{E_f} の間のホモトピー

$$H : E_f \times I \longrightarrow E_f$$

は

$$h(\omega, t)(s) = \omega(st)$$

で定義された写像 h を用いて

$$H(x, \omega, t) = (x, h(\omega, t))$$

で与えられる。これが

$$\begin{array}{ccc} E_f \times I & \xrightarrow{H} & E_f \\ \downarrow{\scriptstyle p\times id} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ Y \times I & \xrightarrow{pr_1} & Y \end{array}$$

を可換にしていることは容易に確かめられる。$r \circ i$ の方はずっと易しい。 というのは $r \circ i = 1_X$ だからである。

最後に, $p: E_f \to Y$ がファイバー空間であることを示すことが残っている。 実はこれは前にでてきたパス・ループ ファイバー空間

$$PX \longrightarrow X$$

の場合 (命題 1.2.7) とほとんど同じなのである。 そこで証明の概略だけ述べることにする。

次の可換な図式が与えられているとする。

$$\begin{tikzcd} Z \times \{0\} \arrow[r, "g"] \arrow[d] & E_f \arrow[d, "p"] \\ Z \times I \arrow[r, "G"] & Y \end{tikzcd}$$

このとき右斜め上向きの写像

$$\widetilde{G} : Z \times I \longrightarrow E_f$$

で図式を可換にするものを見つけたい。それは $g(z) = (g_1(z), g_2(z))$ と書いて

$$\begin{aligned} G_1(z,t) &= g_1(z) \\ G_2(z,t) &= \begin{cases} g_2(z)(s(1+t)) & 0 \le s \le \frac{1}{1+t} \\ G(z, s(1+t)-1) & \frac{1}{1+t} \le s \le 1 \end{cases} \end{aligned}$$

と定義したとき $\widetilde{G}(z) = (G_1(z), G_2(z))$ で与えられる。この $\widetilde{G}$ が連続で求める性質を持っていることを確かめるのは, 読者に任せよう。 □

例 1.5.4. 上の証明から分かるように, パス・ループ ファイバー空間は, この定理の特別な場合として得られる。つまり X を x_0 を基点とする基点付きの空間とするとき, 包含写像

$$i : \{x_0\} \hookrightarrow X$$

をファイバー空間で取り替えてできたのが

$$PX \longrightarrow X$$

である。実際,

$$\begin{aligned} E_i &= \{(x,\omega) \in \{x_0\} \times \mathrm{Map}(I,X) \mid i(x) = \omega(0)\} \\ &= \{\omega \in \mathrm{Map}(I,X) \mid \omega(0) = x_0\} \\ &= PX \end{aligned}$$

であり, $p : E_i \to X$ は $PX \to X$ と全く同じ写像である。 □

上の定理で任意の写像がファイバー空間に取り替えられることをみたが, ではもともと写像がファイバー空間の射影だったらどうなるだろう。 もちろん期待されるように元のファイバー空間と「同じ」 (ファイバーホモトピー同値) になるのである。

系 1.5.5. $p : E \to B$ がファイバー空間なら, p をファイバー空間に取り替えてできたファイバー空間

$$E_p \longrightarrow B$$

は p とファイバー ホモトピー同値である。

証明. 定理 1.5.2 の内容は, ファイバーホモトピー同値そのものである。 □

よって, 系 1.4.10 により次を得る。

系 1.5.6. $p : E \to B$ をファイバー空間とする。 任意の点 $x \in B$ に対し, x 上のファイバーとホモトピーファイバーはホモトピー同値

$$p^{-1}(x) \simeq F_{p,x}$$

である。またこのホモトピー同値を与える写像

$$i : p^{-1}(x) \longrightarrow F_{p,x}$$

は $i(y) = (y, c_x)$ で与えられる。ここで c_x は x への *constant loop* である。

1.6 ファイバー空間とホモトピー群

前節では, 任意の連続写像はファイバー空間に変形できることを示した。つまり

$$f : X \longrightarrow Y$$

に対し, その写像跡

$$p : E_f \longrightarrow Y$$

はファイバー空間であり, また f にホモトピックである。

$y \in Y$に対しその上のホモトピーファイバー $F_{f,y} = p^{-1}(y)$ の包含写像

$$F_{f,y} \hookrightarrow E_f$$

を考えると, これも連続写像なのだから, これをファイバー空間で取り替えることができる。 それのファイバーを取り同様の操作を繰り返すと, 無限に続くファイバー空間の列ができる。これを f のホモトピーファイバー列といい, これはファイバー空間に対する ホモトピー群の長い完全列と深い関係があるのである。

本節では, まずホモトピーファイバー列の正確な定義と構成を与える。次の二つ §1.7 と §1.8 で, その応用として, ファイバー空間に対するホモトピー群の長い完全列の存在を証明し, §1.4 で後回しにした疑問の内の一つに答える。

定義 1.5.3 で導入した記号を用いると, これからやりたいのは

$$F_f \xrightarrow{j} E_f \xrightarrow{p} Y$$

というファイバー空間を左へ続けるために j のホモトピーファイバーを取ることであるが, その前に, 簡単のため E_f を X に戻してみよう。E_f と X はホモトピー同値だから E_f を X に置き換えても差し支えない。そこで

$$F_f \xrightarrow{j} E_f \xrightarrow{r} X$$

という合成を考えてそのホモトピーファイバーを取るのであるが, 実は $r \circ j$ をファイバー空間で取り替える必要は無いのである。

命題 1.6.1. 任意の $y \in Y$ に対し, $r \circ j : F_{f,y} \to X$ はファイバー空間であり, $f(x) = y$ である x 上のファイバーは ΩY である。

証明. 直接 $r \circ j$ が CHP を持つことを示しても良いのであるが, ここではもっと楽な方法を使う。$r \circ j$ がパス・ループ ファイバー空間

$$PY \longrightarrow Y$$

の f によるプルバックであることを示すのである。そのためまずもっと詳しく f のホモトピーファイバーを書き表してみる。

$$\begin{aligned} F_{f,y} &= \{(x,\omega) \in E_f \mid \omega(1) = y\} \\ &= \{(x,\omega) \in X \times \mathrm{Map}(I,Y) \mid \omega(0) = f(x), \omega(1) = y\} \\ &\cong \{(x,\omega) \in X \times \mathrm{Map}(I,Y) \mid \omega(1) = f(x), \omega(0) = y\} \end{aligned}$$

であり

$$r \circ j : F_{f,y} \longrightarrow X$$

は $(r \circ j)(x,\omega) = x$ で与えられている。一方

$$\begin{aligned} f^*(PY) &= \{(x,\omega) \in X \times PY \mid f(x) = \omega(1)\} \\ &= \{(x,\omega) \in X \times \mathrm{Map}(I,Y) \mid f(x) = \omega(1), \omega(0) = y\} \end{aligned}$$

ここで, Y の基点として y を考えている。よって $F_{f,y} = f^*(PY)$ である。また射影

$$f^*(PY) \longrightarrow X$$

が $r\circ j$ と一致することはすぐに分かる。故に, ファイバー空間の連続写像によるプルバックとして, $r\circ j$ もファイバー空間である。

次に $f(x)=y$ である x に対し x 上のファイバーは

$$\begin{aligned}(r\circ j)^{-1}(x) &= \{(x',\omega)\in F_{f,y} \mid (r\circ j)(x',\omega)=x\}\\ &= \{(x',\omega)\in F_{f,y} \mid x'=x\}\\ &= \{(x,\omega)\in X\times \mathrm{Map}(I,Y) \mid \omega(1)=f(x),\omega(0)=y\}\\ &= \{(x,\omega)\in X\times \mathrm{Map}(I,Y) \mid \omega(0)=\omega(1)=y\}\\ &= \Omega Y\end{aligned}$$

となる。 □

これで連続写像 $f:X\to Y$ に対し

$$\Omega Y \xrightarrow{q} F_f \xrightarrow{r\circ j} X \xrightarrow{f} Y$$

という写像と空間の列で,

- F_f は f のホモトピーファイバー
- ΩY は $r\circ j$ のファイバー

であるものが得られた。

次のステップは, 上の列を左に続けることである。つまり ΩY 或いは F_f をホモトピー同値な空間で置き換えてファイバー空間を作り, そのファイバーを考えるのであるが, そのために一つ前に戻って $r\circ j$ をファイバー空間で取り替えることにする。

$$\begin{tikzcd} E_{r\circ j} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\tilde{p}"] & F_f \arrow[d, "r\circ j"] \\ X \arrow[r, "="] & X \end{tikzcd}$$

ところが, もともと $r\circ j$ はファイバー空間だったので, これは $r\circ j$ と $\tilde{p}$ の間のファイバーホモトピー同値になっている。よって, 系 1.4.10 により, $\tilde{p}$ のファイバー $F_{r\circ j}$ と $r\circ j$ のファイバー, つまり ΩY はホモトピー同値になる。上と同じ議論で, 合成

$$F_{r\circ j} \hookrightarrow E_{r\circ j} \xrightarrow{\simeq} F_f$$

はファイバー空間になっていて, そのファイバーは ΩX である。また系 1.4.10 により q のホモトピーファイバーと ΩX はホモトピー同値になる。これで空間と写像の列

$$\Omega X \longrightarrow \Omega Y \xrightarrow{q} F_f$$

で q のホモトピーファイバーが ΩX とホモトピー同値であるものができたが, この ΩX から ΩY への写像はどういうものだろうか。 ループ空間の間の写像としては, ごく自然に定義されるものがある。

定義 1.6.2. X, Y を基点付き空間とし

$$f : X \longrightarrow Y$$

を基点を保つ写像とする。このとき連続写像

$$\Omega f : \Omega X \longrightarrow \Omega Y$$

を $\omega \in \Omega X$ に対し

$$\Omega f(\omega) = f \circ \omega$$

と定義する。

演習問題 1.6.3. これが連続であることを確かめよ。

上で出てきた ΩX から ΩY への写像は, Ωf と一致しているのだろうか。つまり

$$\begin{tikzcd}
\Omega X \arrow[rr, "\Omega f"] \arrow[d, "q'"] & & \Omega Y \arrow[d, "q"] \\
F_{r\circ j} \arrow[r, "j'"] & E_{r\circ j} \arrow[r, "r'"] & F_f
\end{tikzcd}$$

が可換になるかどうかであるが, 残念ながらそれは正しくない。しかし

$$q \circ \Omega f \simeq r' \circ j' \circ q'$$

にはなっているのである。これを見るために, まず $E_{r\circ j}$ と $F_{r\circ j}$ を具体的に書いてみる。

$$\begin{aligned}
E_{r\circ j} &= \{((x,\omega),\omega') \in F_f \times \mathrm{Map}(I,X) \mid r\circ j(x,\omega) = \omega'(0)\} \\
&= \{(x,\omega,\omega') \in X \times \mathrm{Map}(I,Y) \times \mathrm{Map}(I,X) \mid f(x) = \omega(0), \omega(1) = *, x = \omega'(0)\} \\
F_{r\circ j} &= \{(x,\omega,\omega') \in X \times \mathrm{Map}(I,Y) \times \mathrm{Map}(I,X) \mid f(x) = \omega(0), \omega(1) = *, x = \omega'(0), \omega'(1) = *\}
\end{aligned}$$

写像

$$k : F_{r\circ j} \longrightarrow \Omega Y$$

を

$$k(x,\omega,\omega')(t) = \begin{cases} f\circ\omega'(1-2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \omega(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

で定義すれば $\Omega f \simeq k \circ q'$ となっていることはすぐにわかるので, 次の補題を示せば良い。

補題 1.6.4. $q \circ k \simeq r' \circ j'$ である。

証明. まず合成

$$F_{r\circ j} \xrightarrow{j'} E_{r\circ j} \xrightarrow{r'} F_f$$

は

$$(r' \circ j')(x, \omega, \omega') = (x, \omega)$$

で与えられている。そこでホモトピー

$$H : F_{r\circ j} \times I \longrightarrow F_f$$

を $H(x, \omega, \omega'; s) = (h(x, \omega, \omega'; s), \ell(x, \omega, \omega'; s))$ と書いたとき

$$\begin{aligned} h(x, \omega, \omega'; s) &= \omega'(1-s) \\ \ell(x, \omega, \omega; s)(t) &= \begin{cases} f \circ \omega'(1-s-t) & 0 \le t \le 1-s \\ \omega\left(\frac{1}{s}(t+s-1)\right) & 1-s \le t \le 1 \end{cases} \end{aligned}$$

と定義すれば良い。 □

これまでのことをもう一度まとめると, 空間と連続写像の列

$$\Omega X \xrightarrow{\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{q} F_f \xrightarrow{r\circ j} X \xrightarrow{f} Y \tag{1.11}$$

で

- F_f は f のホモトピーファイバー
- ΩY は $r \circ j$ のファイバー
- ΩX は q のホモトピーファイバーとホモトピー同値

であるものができた。この三つの中では最後のものがいちばん条件が緩い。 このようなものに名前をつける。

定義 1.6.5. 空間と写像の列

$$W \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y$$

がホモトピーファイバー列 (*homotopy fiber sequence*) であるとは, W と f のホモトピーファイバーとが g によりホモトピー同値になることである。

この定義を使えば (1.11) は, どの連続する三項もホモトピーファイバー列になっていると言える。

さて今度は f の代わりに q を使って上と同じことをすれば, どの連続する三項もホモトピーファイバー列になっている列

$$\Omega\Omega Y \longrightarrow \Omega F_f \longrightarrow F_q \longrightarrow \Omega Y \longrightarrow F_f$$

が得られる。$F_q \simeq \Omega X$ だから, この列は

$$\Omega\Omega Y \longrightarrow \Omega F_f \longrightarrow \Omega X \longrightarrow \Omega Y \longrightarrow F_f$$

と書いてもよい。こうすると (1.11) とうまくつながって

$$\Omega\Omega Y \longrightarrow \Omega F_f \longrightarrow \Omega X \longrightarrow \Omega Y \longrightarrow F_f \longrightarrow X \longrightarrow Y$$

という列が得られる。ここで $\Omega\Omega Y$ は Y 上のループ空間上のループ空間である。 これをもっと簡単に表すため次の記号を使う。

定義 1.6.6. 基点付き空間 X に対し X 上 n回ループ空間を取ってできた空間, つまり

$$\underbrace{\Omega\Omega\cdots\Omega}_{n回} X$$

を $\Omega^n X$ と書き, X の n重ループ空間 (n-*fold loop space*) という。

上の構成をどんどん続ければ, 無限に続くホモトピーファイバー列が得られる。

定理 1.6.7. 任意の連続写像 $f : X \to Y$ に対し, 空間と写像の列

$$\begin{aligned}\cdots \longrightarrow \Omega^n F_f \xrightarrow{\Omega^n r\circ j} \Omega^n X \xrightarrow{\Omega^n f} \Omega^n Y &\xrightarrow{\Omega^{n-1} q} \Omega^{n-1} F_f \xrightarrow{\Omega^{n-1} r\circ j} \cdots \\ \cdots &\longrightarrow \Omega F_f \xrightarrow{\Omega r\circ j} \Omega X \xrightarrow{\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{q} F_f \xrightarrow{r\circ j} X \xrightarrow{f} Y\end{aligned}$$

でどの連続する三項もホモトピーファイバー列になっているものが存在する。

定義 1.6.8. 上の定理に現れた列を f のホモトピーファイバー列という。

1.7 多重ループ空間

前節でのホモトピーファイバー列の構成で, 多重ループ空間 (iterated loop space) ができた。ここではすこしファイバー空間から離れて, 多重ループ空間の一般的な性質を調べることにしよう。

X を基点を持つ空間とするとき, X の n重ループ空間は

$$\Omega^n X = \underbrace{\Omega\Omega\cdots\Omega}_{n回} X$$

で定義されていた。別の書き方をすれば

$$\Omega^n X = \underbrace{\mathrm{Map}_*(S^1, \mathrm{Map}_*(S^1, \cdots, \mathrm{Map}_*(S^1, X)}_{n回})$$

となる。このままではややこしいし書くのも面倒なので, まずもう少し単純な n重ループ空間の定義が欲しい。実際もっと楽な記述法があって, 結果から書いてしまうと次のようになる。

定理 1.7.1. 基点付き空間 X に対し同相

$$\Omega^n X \cong \mathrm{Map}_*(S^n, X)$$

がある。

この定理を証明するために, いくつかの準備が必要になる。

定義 1.7.2. 基点付き空間 X と Y に対し, X とY のスマッシュ積 (*smash product*) $X\wedge Y$ を

$$X\wedge Y = X\times Y/X\times\{*\}\cup\{*\}\times Y = X\times Y/X\vee Y$$

で定義する。また射影

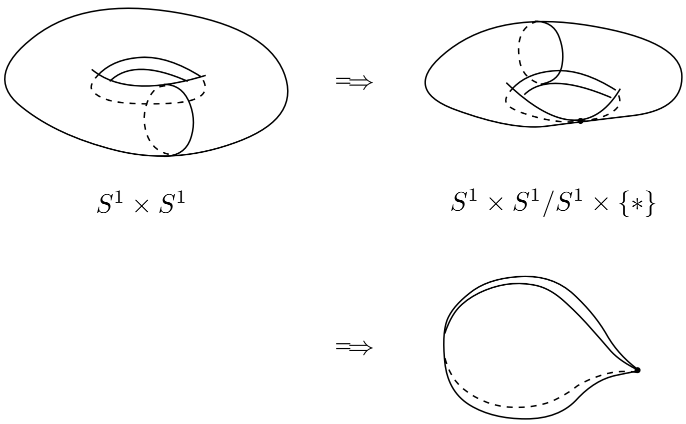
$$X\times Y \longrightarrow X\wedge Y$$

による $(x,y)\in X\times Y$ の像を $x\wedge y$ と書く。$X\wedge Y$ の基点も $*$ で表すと, 定義から

$$x\wedge * = *\wedge y = *$$

である。

例 1.7.3. $S^1\wedge S^1 = S^2$ である。実際 $S^1\times S^1$ はトーラスであるし, その中の $S^1\vee S^1$ を一点につぶすと, 図1.7で分かるように S^2 が得られる。



$S^1\times S^1$ $\quad$ $S^1\times S^1/S^1\times\{*\}$

$S^1\times S^1/S^1\vee S^1$

図 1.7: $S^1\wedge S^1$

このような直感的な議論でなく, もっと正確に証明したければ次のようにすればよい。

まずトーラス $S^1\times S^1$ を, 図1.8のように I^2 の相対する辺を同じ向きに張り合わせたものと考える。

$$S^1\times S^1 = I^2/\sim$$

ここで $\sim$ は次の関係で生成される同値関係である。

$$\begin{aligned} s \in I \text{ に対し}, (s,0) &\sim (s,1) \\ t \in I \text{ に対し}, (0,t) &\sim (1,t) \end{aligned}$$

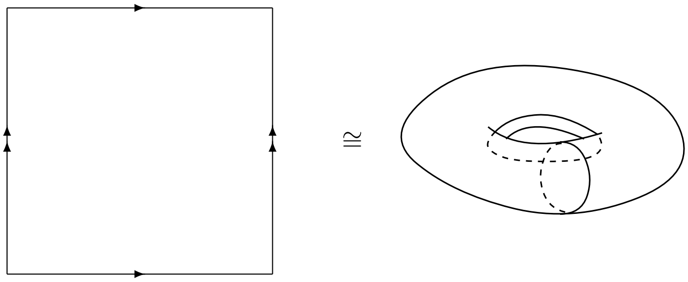


図 1.8: 正方形の辺を貼り合せてトーラスを作る

このとき $S^1 \times S^1$ の中の $S^1 \vee S^1$ は I^2 の境界に対応している。よって

$$S^1 \wedge S^1 = S^1 \times S^1 / S^1 \vee S^1 = \frac{I^2/\sim}{\partial I^2/\sim}$$

という同一視を得る。ここで $\sim$ は ∂I^2 の中の点を同一視する同値関係だから, 先に ∂I^2 をつぶしてしま えば $\sim$ は考えなくてもよい。よって

$$S^1 \wedge S^1 = I^2/\partial I^2 \cong S^2$$

となる。 □

上の議論は, 高次元にもそのまま適用できる。

補題 1.7.4. 任意の m, n に対し

$$S^m \wedge S^n \cong S^{m+n}$$

が成り立つ。

証明. まず

$$\begin{aligned} S^m &= I^m/\partial I^m \\ S^n &= I^n/\partial I^n \end{aligned}$$

と思う。すると

$$S^m \times S^n = (I^m/\partial I^m) \times (I^n/\partial I^n)$$

であるが, これは $I^m \times I^n$ で

$$\begin{aligned} x \in I^m,\ y,z \in \partial I^n \text{に対し}, (x,y) &\sim (x,z) \\ x,y \in \partial I^m,\ z \in I^n \text{に対し}, (x,z) &\sim (y,z) \end{aligned}$$

という同一視をおこなってできた空間

$$S^m \times S^n = I^m \times I^n / \sim$$

である。このとき, $S^m \vee S^n$ は $\partial(I^m \times I^n)$ に対応している。よって

$$\begin{aligned} S^m \wedge S^n &= S^m \times S^n / S^m \vee S^n \\ &= I^m \times I^n / \partial(I^m \times I^n) \\ &= I^{m+n} / \partial I^{m+n} \\ &\cong S^{m+n} \end{aligned}$$

となる。 □

定理 1.7.1 は, スマッシュ積についての一般的な結果である, 次の定理の系である。

定理 1.7.5. X, Y, Z を基点付きの空間とする。Y が局所コンパクト *Hausdorff* ならば, 集合として全単射

$$\mathrm{Map}_*(X \wedge Y, Z) \cong \mathrm{Map}_*(X, \mathrm{Map}_*(Y, Z))$$

がある。更に X とY がコンパクト *Hausdorff* ならば, この対応は同相になる。

注意 1.7.6. 上の定理の仮定, 特に, 後半の仮定は強すぎる。 そこで一般には位相をコンパクト生成位相という位相に取り替えて考える。 それについて, 詳しくは西田の本 [西田吾85] の §1.2 か Hu の [Hu64] の §V.3 か, または Steenrod の [Ste67] を見よ。

証明. まず写像

$$\varphi : \mathrm{Map}_*(X \wedge Y, Z) \longrightarrow \mathrm{Map}_*(X, \mathrm{Map}_*(Y, Z))$$

を定義する。 $f \in \mathrm{Map}_*(X \wedge Y, Z)$ と $x \in X$ に対し, Y から Z への基点を保つ写像 $\varphi(f)(x)$ を定義したいのであるが, そのためには $y \in Y$ に対し Z の点 $\varphi(f)(x)(y)$ を定めればよい。そこで

$$\varphi(f)(x)(y) = f(x \wedge y)$$

とおく。

$$\varphi(f)(x)(*) = f(x \wedge *) = f(*) = *$$

より基点を保つ写像

$$\varphi(f)(x) Y \longrightarrow Z$$

を得る。これが連続であることはすぐわかり, よって $\varphi(f)(x) \in \mathrm{Map}_*(Y, Z)$ となる。また

$$\varphi(f)(*)(y) = f(* \wedge y) = f(*) = *$$

より $\varphi(f) : X \to \mathrm{Map}_*(Y, Z)$ も基点を保ち連続である。 よって

$$\varphi : \mathrm{Map}_*(X \wedge Y, Z) \longrightarrow \mathrm{Map}_*(X, \mathrm{Map}_*(Y, Z))$$

が得られた。次にその逆写像

$$\psi : \mathrm{Map}_*(X, \mathrm{Map}_*(Y, Z)) \longrightarrow \mathrm{Map}_*(X \wedge Y, Z)$$

を $g \in \mathrm{Map}_*(X, \mathrm{Map}_*(Y, Z))$ と $x \wedge y$ に対し

$$\psi(g)(x \wedge y) = g(x)(y)$$

で定義する。これが well-defined であることを確かめなければならないが, それは

$$g(x)(*) = g(*)(y) = *$$

より明らかである。また, これは $\psi(g)$ が基点を保つことも示している。連続性については, Y が局所コンパクトという条件と, コンパクト開位相の定義を用いればすぐわかる。

φ と ψ が互いに逆になっていることは容易に確かめられる。例えば,

$$\begin{aligned}(\varphi \circ \psi)(g)(x)(y) &= \varphi(\psi(g))(x)(y) \\ &= \psi(g)(x \wedge y) \\ &= g(x)(y)\end{aligned}$$

より $\varphi \circ \psi = 1$ である。$\psi \circ \varphi = 1$ も同様である。

後半は読者の演習とする。 □

演習問題 1.7.7. この定理の後半を証明せよ。

注意 1.7.8. 写像空間の位相については, 小松, 中岡, 菅原の本 [小中菅67] の第1章§5に詳しい。

定理 *1.7.1* の証明. 上の定理を繰り返して使うと

$$\begin{aligned}\Omega^n X &= \underbrace{\mathrm{Map}_*(S^1, \mathrm{Map}_*(S^1, \cdots, \mathrm{Map}_*(S^1,}_{n\text{回}} X) \cdots) \\ &= \mathrm{Map}_*(S^1 \wedge S^1, \underbrace{\mathrm{Map}_*(S^1, \mathrm{Map}_*(S^1, \cdots, \mathrm{Map}_*(S^1,}_{n-1\text{回}} X) \cdots) \\ &= \mathrm{Map}_*(\underbrace{S^1 \wedge \cdots \wedge S^1}_{n\text{回}}, X)\end{aligned}$$

となる。補題 1.7.4 により

$$\underbrace{S^1 \wedge \cdots \wedge S^1}_{n\text{回}} \simeq S^n$$

だから, これで定理が証明された。 □

この証明をよくみると $\Omega^n X$ にはもう一つの表し方があることがわかる。

系 1.7.9. 基点付き空間 X に対し同相

$$\Omega^n X \cong \{f \in \mathrm{Map}(I^n, X) \mid f(\partial I^n) = \{*\}\}$$

がある。

§1.3 で見たように, ループ空間は積を持つ。もっと正確に言う と, Hopf空間になる。n重ループ空間 $\Omega^n X$ も $n-1$ 重ループ空間 $\Omega^{n-1}X$ 上のループ空間だから Hopf空間であるが, $n>1$ の時は $\Omega^n X$ の積はある特別な性質を持つのである。それを見るために $\Omega^n X$ の積を具体的に書いてみよう。そのためには上の系の同一視が有効である。

$f, g \in \Omega^n X$ を

$$f, g : I^n \longrightarrow X$$

で $f(\partial I^n) = g(\partial I^n) = *$ である写像と思う。 $\Omega^n X$ 上の積は $\Omega^n X = \Omega\Omega^{n-1}X$ という同一視によって定義されているから, $f * g$ は I^n の第一座標を使って

$$(f*g)(t_1, t_2, \cdots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \cdots, t_n) & 0 \le t_1 \le \frac{1}{2} \\ g(2t_1 - 1, t_2, \cdots, t_n) & \frac{1}{2} \le t_1 \le 1 \end{cases}$$

によって与えられている。これを絵で描くと となる。ところで定理 1.7.1 における同一視

$\Omega^n X = \mathrm{Map}_*(S^n, X)$ によって $\mathrm{Map}_*(S^n, X)$ にも積が与えられるが, それはどのような写像だろう。 定理 1.7.1 の証明を見ればわかるように

$$\{f \in \mathrm{Map}(I^n, X) \mid f(\partial I^n) = \{*\}\} \cong \mathrm{Map}_*(S^n, X)$$

の同一視は ∂I^n を潰すことで与えられているから, $\mathrm{Map}_*(S^n, X)$ 上の積は次の補題の写像で与えられることが分る。

補題 1.7.10. $\Omega^n X = \mathrm{Map}_*(S^n, X)$ と同一視すると, $f, g \in \Omega^n X$ の積 $f * g$ は

$$S^n \xrightarrow{pinch} S^n \vee S^n \xrightarrow{f \vee g} X \vee X \xrightarrow{fold} X$$

で与えられる。

これは定義 ?? で定義されたホモトピー群の積と同じである。 ホモトピー群$\pi_i(X)$は$i \geq 2$なら可換であった(Lemma ??)。故に $\Omega^n X$の積も$n \geq 2$ならある種の可換性をみたす。正確に述べると

命題 1.7.11. $\Omega^n X$の積を

$$\mu : \Omega^n X \times \Omega^n X \longrightarrow \Omega^n X$$

とし

$$T : \Omega^n X \times \Omega^n X \longrightarrow \Omega^n X \times \Omega^n X$$

を順序を入れ換える写像とする。すると$n \geq 2$なら

$$\mu \circ T \simeq \mu$$

である。

証明. Lemma ??の証明と全く同じ。 □

注意 1.7.12. 群Gの積を

$$\mu : G \times G \longrightarrow G$$

とするときGが可換であることは

$$\mu \circ T = \mu$$

と書ける。H-spaceが位相群の定義で $=$ を $\simeq$ で置き換えたものである ことを考えると, 上のPropositionは $n \geq 2$ の時 $\Omega^n X$ が"可換" なH-spaceであると言っていることになる。

このように多重ループ空間とホモトピー群の間には深い関係があることがわかったが, より直接的には次の結果がある。

命題 1.7.13. 基点付き空間Xに対し

$$\pi_0(\Omega^n X) = \pi_n(X)$$

である。

証明. n次ホモトピー群$\pi_n(X)$の定義は

$$\pi_n(X) = [S^n, X]_* = \{S^n\text{から}X\text{への基点を保つ写像のホモトピー類}\}$$

であり

$$\pi_0(\Omega^n X) = \{\Omega^n X\text{の弧状連結成分}\}$$

である。

ここで$f, g \in \Omega^n X$が同じ弧状連結成分にはいるということは, fと gが$\Omega^n X$内の道で結べることである。よって

$$\begin{aligned} & f, g \in \Omega^n X\text{が同じ弧状連結成分に入る。} \\ \Longleftrightarrow \quad & h : I \longrightarrow \Omega^n X\text{で}h(0) = f, h(1) = g\text{であるものが存在する。} \end{aligned}$$

このとき

$$H : S^n \times I \longrightarrow X$$

を

$$H(x, t) = h(x)(t)$$

で定義すれば，これはfとgの間の基点を保つホモトピーになっている。逆に fとgの間の基点を保つホモトピーはfとgの$\Omega^n X$内での道を与え る。故に

$$\begin{aligned} & f, g \in \Omega^n X\text{が同じ弧状連結成分に入る。} \\ \Longleftrightarrow \quad & f\text{と}g\text{が基点を保つホモトピーで}\mathrm{homotopic}\text{。} \end{aligned}$$

となる。これで

$$\pi_0(\Omega^n X) = [S^n, X]_* = \pi_n(X)$$

が示された。 □

系 1.7.14. $\pi_m(\Omega^n X) = \pi_{m+n}(X)$。特に$\pi_n(\Omega X) = \pi_{n+1}(X)$ である。

1.8 ファイバー空間と基点を保つホモトピー

§1.6で約束したように，このsectionでは fibrationに対するhomotopy群 のlong exact sequenceの存在を証明する。基点付き空間Xに対しXのn次 homotopy群はn次元球面からの基点付きhomotopy集合

$$\pi_n(X) = [S^n, X]_*$$

で定義されていたから，まず一般の基点付きhomotopy集合について調べ最も一般 的な形の基点付きhomotopy集合に対するlong exact seqeunceを証明し，その特 別な場合としてfibrationに対するhomotopy群のlong exact sequenceを証明する ことにする。

基点付きのhomotopy集合とfibrationの関係を考えるのだからまず必要になるの は，基点付きfibrationの概念である。しかしそれはfibrationの定義で全ての写 像，homotopyを基点付きにすれば得られる。

定義 1.8.1. E, B, Xを基点付き空間とし$p : E \longrightarrow B$を基点を保つ写 像とする。pがXに対し基点付きCHPを持つとは，任意 の基点を保つhomotopy

$$H : X \times I \longrightarrow B$$

と基点を保つ写像

$$f : X \longrightarrow E$$

で

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} & \xrightarrow{f} & E \\ \big\downarrow & & \big\downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

に対し, 基点を保つhomotopy

$$\widetilde{H} : X \times I \longrightarrow E$$

で

$$\begin{tikzcd} X \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, "\widetilde{H}"] & B \end{tikzcd}$$

を可換にするものが存在することである。

定義 1.8.2. E, Bを基点付き空間とし$p : E \longrightarrow B$を基点を保つ写像とす る。pが基点付きのHurewicz fibrationであると は, pが任意の基点付き空 間に対して基点付きのCHPを持つことである。またpがSerre fibrationである とはpが任意の基点付きCW複体に対し基点付きCHPを持つことである。

演習問題 1.8.3. 普通のfibrationの場合をまねて, 基点付きfibrationの間の基点を保つ写像, 基 点付きfiber homotopy, 基点付きfiber homotopy同値, 基点付きhomotopy fiber列を定義せよ。

基点付きの場合もSerre fibrationとHurewicz fibrationを区別せず単に fibrationと呼ぶことにする。基点付きfibrationについても普通のfibrationに ついて成り立つことは全て成り立つ。

命題 1.8.4. *基点付きfibrationの基点を保つ写像によるpull-backはまた基点付きfibrationである。*

定理 1.8.5. *$p : E \longrightarrow B$を基点付きfibrationとし, $f, g : X \longrightarrow B$を互いにhomotopicな基点を保つ写像とするとp のfとgによるpull-backは基点付きfiber homotopy同値である。*

定理 1.8.6. *$f : X \longrightarrow Y$を基点を保つ写像とし, 基点への定値写像をE_fの 基点と定義しE_fを基点付き空間と考える。するとDefinition 1.5.1で定義された写像*

$$p : E_f \longrightarrow Y$$

は基点付きfibrationであり, E_fはXと基点付きhomotopy同値である。

定理 1.8.7. *$f : X \longrightarrow Y$を基点を保つ写像とするとき, Theorem 1.6.7の列*

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \Omega^n F_f \longrightarrow \Omega^n X \longrightarrow \Omega^n Y \quad &\longrightarrow \quad \Omega^{n-1} F_f \longrightarrow \cdots \\ \cdots \quad &\longrightarrow \quad \Omega F_f \longrightarrow \Omega X \longrightarrow \Omega Y \longrightarrow F_f \longrightarrow X \longrightarrow Y \end{aligned}$$

では, どの連続する三項も基点付きhomotopy fiber列になっている。

これらの結果の証明は基点無しの場合と全く同様なので省略する。

さて基点付きhomotopy集合のexact sequenceを考えるには，まず第一に基点付き homotopy集合に群の構造を定義しなければならない。残念ながらこれはいつでも できるわけではない。最も重要な場合が次の場合である。

定理 1.8.8. *XをH-spaceとし，Yを基点付き空間とする。このときXの積により $[Y,X]_*$は群になる。*

このTheoremの証明のために次の定義が必要になる。

定義 1.8.9. 基点付き空間X, Yと基点を保つ写像

$$f : Y \longrightarrow Z$$

に対し, homotopy集合の間の写像

$$f_* : [X,Y]_* \longrightarrow [X,Z]_*$$

をfの合成で定義する。より正確には$[g] \in [X,Y]_*$に対し

$$f_*([g]) = [f \circ g]$$

とおく。この写像f_*をfで誘導されたhomotopy集合の間の写像という。

次の事実は定義から明らかである。

補題 1.8.10. *X,Yを基点付き空間とし*

$$f, g : Y \longrightarrow Z$$

を基点を保つ写像とする。$f \simeq g$なら$[X,Y]_*$から$[X,Z]_*$への写像と して$f_* = g_*$である。

Proof of Theorem 1.8.8. まず$[Y,X]_*$に積を定義する。

$$\varphi : [Y,X]_* \times [Y,X]_* \longrightarrow [Y,X \times X]_*$$

を$\varphi([f],[g]) = [f \times g]$で定義する。ここで

$$(f \times g)(y) = (f(y), g(y))$$

である。そこで

$$\mu : X \times X \longrightarrow X$$

をXのH-spaceとしての積とするとき，$[Y,X]_*$上の積を次の合成

$$\bar{\mu} = \mu_* \circ \varphi : [Y,X]_* \times [Y,X]_* \longrightarrow [Y,X \times X]_* \longrightarrow [Y,X]_*$$

で定義する。

この積で$[Y,X]_*$が群になることを示すためには次の三つのことを示す必要が ある。

1. 結合法則

2. 単位元の存在

3. 逆元の存在

ここでは結合法則についてのみ考えることにする。後の二つは読者に任せる。

まずH-spaceの定義から，

$$\mu \circ (\mu \times 1) \simeq \mu \circ (1 \times \mu)$$

である。よってLemma 1.8.10より$[Y, X \times X \times X]_*$から$[Y, X]_*$への写像として

$$\mu_* \circ (\mu \times 1)_* = \mu_* \circ (1 \times \mu)_*$$

である。これを図式で書くと

$$\begin{tikzcd}
{[Y, X \times X \times X]_*} \arrow[r, "(1\times\mu)_*"] \arrow[d, "(\mu\times 1)_*"] & {[Y, X \times X]_*} \arrow[d, "\mu_*"] \\
{[Y, X \times X]_*} \arrow[r, "\mu_*"] & {[Y, X]_*}
\end{tikzcd}$$

となる。これにφについての図式をたすと

$$\begin{tikzcd}
{[Y, X]_* \times [Y, X]_* \times [Y, X]_*} \arrow[r, "1\times\varphi"] \arrow[d, "\varphi\times 1"] & {[Y, X]_* \times [Y, X \times X]_*} \arrow[r, "1\times\mu_*"] \arrow[d, "\varphi"] & {[Y, X]_* \times [Y, X]_*} \arrow[d, "\varphi"] \\
{[Y, X \times X]_* \times [Y, X]_*} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mu_*\times 1"] & {[Y, X \times X \times X]_*} \arrow[r, "(1\times\mu)_*"] \arrow[d, "(\mu\times 1)_*"] & {[Y, X \times X]_*} \arrow[d, "\mu_*"] \\
{[Y, X]_* \times [Y, X]_*} \arrow[r, "\varphi"] & {[Y, X \times X]_*} \arrow[r, "\mu_*"] & {[Y, X]_*}
\end{tikzcd}$$

という可換な図式が得られる。いちばん外側の四角を抜き出すと

$$\begin{tikzcd}
{[Y, X]_* \times [Y, X]_* \times [Y, X]_*} \arrow[r, "1\times\bar{\mu}"] \arrow[d, "\bar{\mu}\times 1"] & {[Y, X]_* \times [Y, X]_*} \arrow[d, "\bar{\mu}"] \\
{[Y, X]_* \times [Y, X]_*} \arrow[r, "\bar{\mu}"] & {[Y, X]_*}
\end{tikzcd}$$

となる。これは

$$\bar{\mu} \circ (\bar{\mu} \times 1) = \bar{\mu} \circ (1 \times \bar{\mu})$$

つまり$\bar{\mu}$が結合法則をみたすことを示している。

単位元と逆元の存在についてもXのH-spaceとしての構造から同様にしてわかる。 □

系 1.8.11. 基点付き空間XとYについて$[Y, \Omega X]_*$は群になる。

群があればその間の準同型を考えるのが自然である。X, YをH-spaceとすると き, $[Z, X]_*$と$[Z, Y]_*$は共に群になるが, その間の準同型を考えたい。

$$f : X \longrightarrow Y$$

が基点を保つ写像なら,

$$f_* : [Z, X]_* \longrightarrow [Z, Y]_*$$

が誘導されるがこれはいつ群の準同型になるだろう。H-spaceは群に非常によく 似たものだったので, XからYへの“準同型”の様なものが定義できるはずで ある。そしてもしfがそういうものなら, f_*も準同型になるのではないかと いうのは自然な考えである。H-spaceは群の定義で$=$を$\simeq$に置き換えて得 られたものだから, 群の準同型の定義で$=$を$\simeq$に置き換えるとH-spaceの 間の“準同型”が定義できそうである。

定義 1.8.12. XとYをH-spaceとし

$$\begin{aligned} \mu_X &: X \times X \longrightarrow X \\ \mu_Y &: Y \times Y \longrightarrow Y \end{aligned}$$

をXとYのH-spaceの積とする。基点を保つ写像

$$f : X \longrightarrow Y$$

がH-mapであるとは

$$\mu_Y \circ (f \times f) \simeq f \circ \mu$$

であることである。

補題 1.8.13. *$f : X \longrightarrow Y$がH-mapなら, 任意の基点付き空間Zに対しfで誘 導された写像*

$$f_* : [Z, X]_* \longrightarrow [Z, Y]_*$$

は群の準同型である。

演習問題 1.8.14. このLemmaを証明せよ。

Loop空間の間の写像には自然にH-mapになるものがある。

補題 1.8.15. *$f : X \longrightarrow Y$を基点付き空間の間の基点を保つ連続写像とすると,*

$$\Omega f : \Omega X \longrightarrow \Omega Y$$

はH-mapである。

証明. Lemma 1.7.10より, $\omega, \omega' \in \Omega X$の積は合成

$$S^1 \stackrel{pinch}{\longrightarrow} S^1 \vee S^1 \stackrel{\omega\vee\omega'}{\longrightarrow} X \vee X \stackrel{fold}{\longrightarrow} X$$

で与えられている。これにfを合成すると次の可換な図式が得られる。

$$\begin{tikzcd}
S^1 \arrow[r, "pinch"] \arrow[d, "\parallel"] & S^1 \vee S^1 \arrow[r, "\omega\vee\omega'"] \arrow[d, "\parallel"] & X \vee X \arrow[r, "fold"] \arrow[d, "f\vee f"] & X \arrow[d, "f"] \\
S^1 \arrow[r, "pinch"] & S^1 \vee S^1 \arrow[r, "f\circ\omega\vee f\circ\omega'"] & Y \vee Y \arrow[r, "fold"] & Y
\end{tikzcd}$$

これは

$$\Omega f(\omega * \omega') = \Omega f(\omega) * \Omega f(\omega')$$

つまりΩfがH-mapであることを示している。 □

系 1.8.16. 基点付き空間X, Y, Zと基点を保つ写像

$$f : X \longrightarrow Y$$

に対し

$$(\Omega f)_* : [Z, \Omega X]_* \longrightarrow [Z, \Omega Y]_*$$

は群の準同型である。

これでこのsectionの主定理を述べる準備ができた。

定理 1.8.17. $p : E \longrightarrow B$を基点付きの*fibration*でFを*fiber*に持つものとし, Xを基点付きの空間とする。このとき$n \geq 1$である整数nに対し

$$[X, \Omega^n F]_* \stackrel{(\Omega^n i)_*}{\longrightarrow} [X, \Omega^n E]_* \stackrel{(\Omega^n p)_*}{\longrightarrow} [X, \Omega^n B]_*$$

は*exact*である。ここで$i : F \hookrightarrow E$は*fiber*の*inclusion*である。

証明. 証明はProposition **??**の時とほとんど同じで, 本質的には基点付きの CHPの言い替えであるが, CHPの使い方を思い出すために詳しく証明を追ってみ よう。

次のことを示せばよい。

1. $[f] \in [X, \Omega^n F]_*$に対し$(\Omega^n i)_* \circ (\Omega^n p)_*([f]) = [*]$である。

2. $[g] \in [X, \Omega^n E]_*$に対し, $(\Omega^n p)_*([g]) = [*]$なら$(\Omega^n i)_*([f]) = [g]$である$[f] \in [X, \Omega^n F]_*$が存在する。

ここで$*$は基点への定値写像を表す。

1は簡単である。

$$[\Omega^n p \circ \Omega^n i \circ f] = [*]$$

つまり

$$\Omega^n p \circ \Omega^n i \circ f \simeq *$$

を示せばよいが,

$$\Omega^n p \circ \Omega^n i \circ f = \Omega^n (p \circ i) \circ f$$

であり$F = p^{-1}(*)$より$p \circ i = *$である。よって

$$\Omega^n p \circ \Omega^n i \circ f = *$$

となる。

2を考えるために$[g] \in [X, \Omega^n E]_*$を取り,

$$\Omega^n p(g) \simeq *$$

と仮定する。この$\Omega^n p(g)$と$*$との間のhomotopyを

$$H : X \times I \longrightarrow \Omega^n B$$

とする。$x \in X, t \in I, y \in S^n$に対し

$$\begin{aligned} H(x,0)(y) &= (\Omega^n p)(g)(x)(y) = p(g(x)(y)) \\ H(x,1) &= * \\ H(*,t) &= * \end{aligned}$$

である。このとき

$$\widetilde{H} : X \times S^n \times I \longrightarrow B$$

を

$$\widetilde{H}(x,y,t) = H(x,t)(y)$$

で定義する。するとHに関する最初の条件から

$$\begin{tikzcd} X \times S^n \times \{0\} \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times S^n \times I \arrow[r, "\widetilde{H}"] & B \end{tikzcd}$$

という可換な図式が得られる。ここで$\tilde{g}(x,y) = g(x)(y)$である。容易 にわかるように$\tilde{g}$も$\widetilde{H}$も基点を保つから,pに関する 基点付きCHPより基点を保つhomotopy

$$H' : X \times S^n \times I \longrightarrow E$$

で

$$
\begin{tikzcd}
X \times S^n \times \{0\} \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\
X \times S^n \times I \arrow[r, "\widetilde{H}"] \arrow[ur, "H'"] & B
\end{tikzcd}
$$

を可換にするものが存在する。すると下の三角から$(x, y) \in X \times S^n$に対し

$$p \circ H'(x, y, 1) = \widetilde{H}(x, y, 1) = *$$

となる。そこで$f(x)(y) = H'(x, y, 1)$とおくと$p(f(x)(y)) = *$より

$$f : X \longrightarrow \Omega^n F$$

という写像が得られた。H'が$\Omega^n i(f)$とgのhomotopyを与えるから

$$(\Omega^n i)_*([f]) = [g]$$

となり, これで2が示された。 □

系 1.8.18. $f : X \longrightarrow Y$を基点を保つ写像とし, Zを任意の基点付きの空間 とする。するとffの*homotopy fiber*列から誘導される列

$$
\begin{aligned}
\cdots \longrightarrow [Z, \Omega^n F_f]_* \quad &\longrightarrow \quad [Z, \Omega^n X]_* \longrightarrow [Z, \Omega^n Y]_* \longrightarrow [Z, \Omega^{n-1} F_f]_* \longrightarrow \cdots \\
\cdots \quad &\longrightarrow \quad [Z, \Omega F_f]_* \longrightarrow [Z, \Omega X]_* \longrightarrow [Z, \Omega Y]_*
\end{aligned}
$$

は群の*exact sequence*である。

Zとして球面を取ると次を得る。

系 1.8.19. $f : X \longrightarrow Y$を基点を保つ写像とすると, 次の*homotopy*群の*long exact sequence*がある。

$$
\begin{aligned}
\cdots \longrightarrow \pi_n(F_f) \longrightarrow \pi_n(X) \longrightarrow \pi_n(Y) \quad &\longrightarrow \quad \pi_{n-1}(F_f) \longrightarrow \cdots \\
\cdots \quad &\longrightarrow \quad \pi_1(F_f) \longrightarrow \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(Y)
\end{aligned}
$$

fがfibrationの時が欲しかった結果である。

系 1.8.20. $p : E \longrightarrow B$が*fibration*なら, 次の*homotopy*群の*long exact sequence*がある。

$$
\begin{aligned}
\cdots \longrightarrow \pi_n(F) \longrightarrow \pi_n(E) \longrightarrow \pi_n(B) \quad &\longrightarrow \quad \pi_{n-1}(F) \longrightarrow \cdots \\
\cdots \quad &\longrightarrow \quad \pi_1(F) \longrightarrow \pi_1(E) \longrightarrow \pi_1(B)
\end{aligned}
$$

証明. 上のCorollaryより

$$
\begin{aligned}
\cdots \longrightarrow \pi_n(F_p) \longrightarrow \pi_n(E) \longrightarrow \pi_n(B) &\longrightarrow \pi_{n-1}(F_p) \longrightarrow \cdots \\
\cdots &\longrightarrow \pi_1(F_p) \longrightarrow \pi_1(E) \longrightarrow \pi_1(B)
\end{aligned}
$$

というexact sequenceがあるが, pがfibrationだから

$$F_p \simeq F$$

よって求めるlong exact sequenceを得る。 □

fがinclusionの場合には$\pi_n(F_f)$に特別な名前がついている。

定義 1.8.21. Xを基点付き空間としAをその基点を含む部分空間とする。$i : A \hookrightarrow X$をinclusionとしたとき

$$\pi_n(X, A) = \pi_{n-1}(F_i)$$

とおき(X, A)のn次相対ホモトピー群(relative homotopy group)または対のホモトピー群(homotopy group of pair)という。

系 1.8.22. *Xを基点付き空間としAをその基点を含む部分空間とすると, 次のhomotopy群のlong exact sequenceがある。*

$$
\begin{aligned}
\cdots \longrightarrow \pi_{n+1}(X, A) \longrightarrow \pi_n(A) \longrightarrow \pi_n(X) &\longrightarrow \pi_n(X, A) \longrightarrow \cdots \\
\cdots &\longrightarrow \pi_2(X, A) \longrightarrow \pi_1(A) \longrightarrow \pi_1(X)
\end{aligned}
$$

注意 1.8.23. この定義では, 相対homotopy群の意味がよく分からない。そもそもどうして $\pi_{n-1}(F_i)$のことを, n次の相対homotopy群と呼ぶのか不思議である。 一つの理由は, 上の完全列の存在である。Homologyやcohomologyのことを知っ ている読者は, 上と同じような完全列がhomologyやcohomologyについても存在す ることを知っているであろう。$\pi_n(X, A) = \pi_{n-1}(F_i)$と定義す れば上の完全列が得られるので, これを$n$次相対homotopy群と呼ぶことにし たのである。それでもまだ納得できないという読者のために, 直接相対 homotopy集合というものを定義しよう。

定義 1.8.24. (X, A)と(Y, B)を位相空間対とする。連続写像

$$f : X \longrightarrow Y$$

が$f(A) \subset B$を満たすとき, fを(X, A)から(Y, B)への位相空間対の写 像であると言い,

$$f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$$

と書く。位相空間対の写像

$$f, g : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$$

に対し, fとgの間の対のhomotopyとは, 連続写像

$$H : (X, A) \times I = (X \times I, A \times I) \longrightarrow (Y, B)$$

で

$$\begin{aligned} H|_{X \times \{0\}} &= f \\ H|_{X \times \{0\}} &= g \end{aligned}$$

であるもののことである。このようなHが存在するとき, fとgは対の写像 としてhomotopicであると言いい, 普通の場合と同じように$f \simeq g$と書く。 また

$$[(X, A), (Y, B)] = \{f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)|\text{連続}\}/ \simeq$$

とおき, (X, A)から(Y, B)への対の写像のhomotopy集合という。

AとBが基点を含むときには, 基点付きの位相空間対の写像や基点付きの対の homotopyも同様に定義される。基点付きの対のhomotopy集合を

$$[(X, A), (Y, B)]_*$$

と書く。

注意 1.8.25. 三対やそれ以上の組の写像やhomotopyやhomotopy集合も同様に定義される。例えば,

$$[(X, A), (Y, B)]_* = [(X, A, *), (Y, B, *)]$$

である。しかし三対以上の時, この例のように二番目以降の空間が順番に小さ くなっていくとは限らない。つまり

$$f : (X, A_1, A_2) \longrightarrow (Y, B_1, B_2)$$

とは, $f(A_1) \subset B_1$と$f(A_2) \subset B_2$というだけで, $A_2 \subset A_1$や$B_2 \subset B_1$であるとは限らないことに注意しておこ う。

位相空間対の写像のhomotopyを定義したのは, $\pi_n(X, A)$が対のhomotopy集 合として書けるからに他ならない。

補題 1.8.26. 基点付きの位相空間対(X, A), つまりAが基点を含むもの, に対し, 全単射

$$\pi_n(X, A) \cong [(D^n, S^{n-1}), (X, A)]_*$$

がある。ここでS^{n-1}はD^nの*boundary*としてD^nの部分空間と思っている。

証明. まず対応

$$\varphi : [(D^n, S^{n-1}), (X, A)]_* \longrightarrow \pi_{n-1}(F_i)$$

を作る。ここでF_iはinclusion

$$i : A \hookrightarrow X$$

のhomotopy fiberであったことを思い出そう。具体的には,

$$F_i = \{\omega : I \longrightarrow X | \omega(0) \in A, \omega(1) = *\} \subset \mathrm{Map}(I, X)$$

である。(読者は, これを定義に戻って確かめて欲しい。)

さて, 基点を保つ対の写像

$$f : (D^n, S^{n-1}) \longrightarrow (X, A)$$

が与えられたとき,

$$D^n = S^{n-1} \times I/(S^{n-1} \times \{1\} \cup \{*\} \times I)$$

と思うことにする。この同一視により

$$S^{n-1} = S^{n-1} \times \{0\}$$

とみなされる。

$$p : S^{n-1} \times I \longrightarrow S^{n-1} \times I/(S^{n-1} \times \{1\} \cup \{*\} \times I)$$

を自然な射影とし, 合成

$$f \circ p : S^{n-1} \times I \longrightarrow X$$

を考える。このときそのadjointを

$$\varphi(f) = ad(f \circ p) : S^{n-1} \longrightarrow \mathrm{Map}(I, X)$$

を考えると, 容易に分かるように

$$\varphi(f)(S^{n-1}) \subset F_i$$

であり, $\varphi(f)$が基点を保っていることが分かる。よって基点を保つ写像

$$\varphi(f) : S^{n-1} \longrightarrow F_i$$

が得られた。基点を保つ対のhomotopy $f \simeq g$があれば, 上と同様にして 基点を保つhomotopy $\varphi(f) \simeq \varphi(g)$ができるので, well-definedである対応

$$\varphi : [(D^n, S^{n-1}), (X, A)]_* \longrightarrow \pi_{n-1}(F_i)$$

が得られた。上の逆の操作をすれば, φの逆写像が得られるので, φは全単射である。 □

これで$\pi_n(X, A)$が"n次"homotopy群と呼ばれることが納得できたと思 う。また"相対"という意味も, それなりに分かったのではないかと思う。さ て, Corollary 1.8.20とCorollary 1.8.22を見比べて, $(X, A) = (E, F)$の場合を考えてみると次のことが分かる。

系 1.8.27. $p : E \longrightarrow B$をFを*fiber*とする*fibration*とする。この時, 射影pは同型

$$p_* : \pi_*(E, F) \xrightarrow{\cong} \pi_*(B)$$

を誘導する。

証明. Five Lemmaから明らか。 □

演習問題 1.8.28. 同型

$$[(D^n, S^{n-1}), (E, F)]_* \cong \pi_n(B)$$

を直接示せ。

このsectionを終わる前に, もっともよく使われるfibrationの性質を述べておこう。これはTheorem 1.8.17の言い替えであるが, 次の形のものが最もよく使われる。証明は読者の演習問題とする。

系 1.8.29. *Fibration* $p : E \longrightarrow B$と連続写像$f : X \longrightarrow B$に対し, もしfが*null-homotopic*つまり定値写像と*homotopic* $f \simeq *$ならfの*fiber*への*lift*が存在する。つまり次の図式が可換になるような

$$\tilde{f} : X \longrightarrow F$$

が存在する。

$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[d] \\
X \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\simeq *"] & E \arrow[d, "p"] \\
 & B
\end{tikzcd}$$

演習問題 1.8.30. これを証明せよ。

1.9 コファイバー空間

これまででfibrationの持つ主要な性質は述べたので, ここですこし視点を変え て次の問題を考えることにしよう。

なぜpath-loop fibration $p : PX \longrightarrow X$はfibrationになるのだ ろうか？

もちろんpath-loop fibrationがfibrationになることは証明済みなので, ここで の質問の意味はもっとintrinsicなものである。言い替えれば, 空間PXと写像 $p : PX \longrightarrow X$の持つどの性質がpがfibrationになるために本質 的なのか, ということである。

これを見るためにPXの定義をもう一度見てみよう。

$$\begin{aligned} PX &= \{\omega : I \longrightarrow X | \omega(0) = *\} \\ &= \mathrm{Map}_*(I, X) \end{aligned}$$

pを考えるためにXもPXと同じ様な書き方で表せれば便利である。実際少し考えれば,

$$\begin{aligned} X &= \{x \in X\} \\ &= \{f : \{*\} \longrightarrow X\} \\ &= \{f : \{0,1\} \longrightarrow X | f(0) = *\} \\ &= \{f : \partial I \longrightarrow X | f(0) = *\} \\ &= \mathrm{Map}_*(\partial I, X) \end{aligned}$$

というふうに書けることがわかる。この書き方をすると, pが非常に自然に定 義された写像であることがわかる。

補題 1.9.1. 上の同一視で, pは∂Iへの制限に対応している。つまり次の図式が可換である。

$$\begin{array}{ccc} PX & \xrightarrow{p} & X \\ \| & & \| \\ \mathrm{Map}_*(I, X) & \xrightarrow{i^*} & \mathrm{Map}_*(\partial I, X) \end{array}$$

ここで$i : \partial I \longrightarrow I$は*inclusion*, i^*はiを後ろから合成する写像, つまり∂Iへの制限である。

更にpのfiberは

$$\begin{aligned} \Omega X &= \{\omega : I \longrightarrow X | \omega(0) = \omega(1) = *\} \\ &= \mathrm{Map}_*(I/\partial I, X) \end{aligned}$$

である。

これまで見てきたことにより, $p : PX \longrightarrow X$はXに無関係に

$$i : \partial I \hookrightarrow I$$

というinclusionによって定義されていると言ってよい。ということは, $p : PX \longrightarrow X$がfibrationであるという事実は$i : \partial I \hookrightarrow I$の性質に由来するはずである。より一般に基点付き空間Xとその基点を含む部分空間Aに対し

$$i^* : \mathrm{Map}_*(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Map}_*(A, Y)$$

が任意の基点付き空間Yに対して基点付きfibrationになる条件を考える。ここで

$$i : A \hookrightarrow X$$

はinclusionである。

もし$\mathrm{Map}_*(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Map}_*(A,Y)$が基点付きfibrationなら，任意の基点付き空間Zと基点を保つhomotopyと写像

$$\begin{aligned} H &: Z \times I \longrightarrow \mathrm{Map}_*(A,Y) \\ f &: Z \longrightarrow \mathrm{Map}_*(X,Y) \end{aligned}$$

で

$$\begin{tikzcd} Z \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \mathrm{Map}_*(X,Y) \arrow[d, "i^*"] \\ Z \times I \arrow[r, "H"] & \mathrm{Map}_*(A,Y) \end{tikzcd}$$

を可換にするものに対し，

$$\begin{tikzcd} Z \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \mathrm{Map}_*(X,Y) \arrow[d, "i^*"] \\ Z \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, "\widetilde{H}"] & \mathrm{Map}_*(A,Y) \end{tikzcd} \tag{1.12}$$

を可換にする基点を保つhomotopy

$$\widetilde{H} : Z \times I \longrightarrow \mathrm{Map}_*(X,Y)$$

が存在する。$\mathrm{Map}_*(-,-)$があるとややこしいのでこれを書き換えよう。

$$\begin{aligned} &f' : X \times Z \longrightarrow Y && \text{を} f'(x,z) = f(z)(x) \\ &H' : A \times Z \times I \longrightarrow Y && \text{を} H'(a,z,t) = H(z,t)(a) \\ &\widetilde{H}' : X \times Z \times I \longrightarrow Y && \text{を} \widetilde{H}'(x,z,t) = \widetilde{H}(z,t)(x) \end{aligned}$$

で定義すると(1.12)が可換であるという条件は

$$\begin{aligned} H' &= \widetilde{H}'|_{A \times Z \times I} \\ \widetilde{H}'(x,z,0) &= f'(x,z) \end{aligned}$$

と同値である。XとAについての条件を求めるために，X, AをY, Zから分離しよう。そのため

$$\begin{aligned} &f'' : X \longrightarrow \mathrm{Map}_*(Z,Y) && \text{を} f''(x)(z) = f'(x,z) \\ &H'' : A \times I \longrightarrow \mathrm{Map}_*(Z,Y) && \text{を} H''(a,t)(z) = H'(a,z,t) \\ &\widetilde{H}'' : X \times I \longrightarrow \mathrm{Map}_*(Z,Y) && \text{を} \widetilde{H}''(x,t)(z) = \widetilde{H}'(x,z,t) \end{aligned}$$

とおくと，上の条件は

$$\begin{aligned} H'' &= \widetilde{H}''|_{A \times I} \\ \widetilde{H}''(x,0) &= f''(x) \end{aligned}$$

となる。以上のことをまとめると

命題 1.9.2. 基点付き空間Xとその基点を含む部分空間Aに対し, $i : A \hookrightarrow X$を*inclusion*とすると

$$i^* : \mathrm{Map}_*(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Map}_*(A, Y)$$

が任意の基点付き空間Yに対し基点付き*fibration*である必要十分条件は, 任意の基点付き空間Zと基点を保つ*homotopy*と写像

$$\begin{aligned} H &: A \times I \longrightarrow \mathrm{Map}_*(Z, Y) \\ f &: X \times I \longrightarrow \mathrm{Map}_*(Z, Y) \end{aligned}$$

で

$$H|_{A\times\{0\}} = f|_A$$

であるものに対し, 基点付き*homotopy*

$$\widetilde{H} : X \times I \longrightarrow \mathrm{Map}_*(Z, Y)$$

で

$$\begin{aligned} H &= \widetilde{H}|_{A\times I} \\ \widetilde{H}|_{X\times\{0\}} &= f \end{aligned}$$

であるものが存在することである。

定義 1.9.3. Inclusion $i : A \hookrightarrow X$が空間Zに対しhomotopy extension property (ホモトピー拡張性質 , HEP)を持つとは,

$$\begin{aligned} H &: A \times I \longrightarrow Z \\ f &: X \longrightarrow Z \end{aligned}$$

で

$$H|_{A\times\{0\}} = f|_A$$

であるものに対し

$$\widetilde{H} : X \times I \longrightarrow Z$$

で

$$\begin{aligned} H &= \widetilde{H}|_{A\times I} \\ \widetilde{H}|_{X\times\{0\}} &= f \end{aligned}$$

であるものが存在することと定義する。

全ての空間と写像とhomotopyを基点付きにしたとき, 基点付きHEPが定義される。

この定義を使うと$i^*: \mathrm{Map}_*(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Map}_*(A,Y)$が基点付 きfibrationであるための必要十分条件は, 次のように述べられる。

定理 1.9.4. *基点付き空間Xとその基点を含む部分空間Aに対し, $i: A \hookrightarrow X$をinclusionとすると*

$$i^*: \mathrm{Map}_*(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Map}_*(A,Y)$$

が任意の基点付き空間Yに対し基点付きfibrationである必要十分条件は,

$$i: A \hookrightarrow X$$

が任意の基点付き空間Zに対し基点付きHEPを持つことである。

証明. 上のPropositionとDefinitionにより, $i^*: \mathrm{Map}_*(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Map}_*(A,Y)$が基点付きfibrationにな るための必要十分条件は, iが$\mathrm{Map}_*(Z,Y)$という形の空間に対して基点付きHEPを持つことであるが,

$$\mathrm{Map}_*(\{0,1\},Y) = Y$$

より, 任意の基点付き空間は$\mathrm{Map}_*(Z,Y)$という形に表せる。よってTheoremの 主張が示された。 □

上のTheoremをもっと簡単に述べるために, 言葉を定義する。

定義 1.9.5. Inclusion $i: A \hookrightarrow X$がcofibrationである とは, iが任意の空 間に対しHEPを持つことと定義する。全て基点付きの時, 基点付きcofibration が定義される。

この定義を使うと

系 1.9.6. *基点付き空間Xとその基点を含む部分空間Aに対し, $i: A \hookrightarrow X$をinclusionとすると*

$$i^*: \mathrm{Map}_*(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Map}_*(A,Y)$$

が任意の基点付き空間Yに対し基点付きfibrationである必要十分条件は,

$$i: A \hookrightarrow X$$

が基点付きcofibrationであることである。

このときのfiberも簡単にわかる。

命題 1.9.7. *$i: A \hookrightarrow X$がcofibrationの時,*

$$i^*: \mathrm{Map}_*(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Map}_*(A,Y)$$

の基点上のfiberは$\mathrm{Map}_*(X/A,Y)$である。

証明. $\mathrm{Map}_*(A,Y)$の基点は, Yの基点への定値写像$*$である。よって基点上のfiberは

$$\begin{aligned}(i^*)^{-1}(\{*\}) &= \{f \in \mathrm{Map}_*(X,Y) | f \circ i = *\} \\ &= \{f \in \mathrm{Map}_*(X,Y) | f|_A = *\} \\ &= \{f \in \mathrm{Map}(X,Y) | f(a) = * \text{ for all } a \in A\} \\ &= \mathrm{Map}_*(X/A, Y)\end{aligned}$$

となる。 □

定義 1.9.8. $i : A \hookrightarrow X$がcofibrationのとき, X/Aをその cofiberという。

一般に, ある数学の概念に“co-”という接頭辞をつけるのは, その双対的 (dual)な概念を表すときである。“双対的”と言うのも曖昧な言葉であるが, だ いたい矢印(写像)の向きを逆にすることと考えて間違いではない。ここで fibrationに対しcofibration, fiberに対しcofiberという言葉を導入したのは, それらがfibrationの持つ性質の双対的なものをみたすからである。つまり fibrationについての今までの結果で, 矢印の向きを全て逆にすればcofibration に関する結果になるはずである。次のsectionでは, fibrationとcofibrationを比較しfibrationに対応するcofibrationの性質を導くことにしよう。

1.10 ファイバー空間とコファイバー空間

Fibrationとcofibrationを比較するために, もう一度今までに得たfibrationに 関する主な結果を書いてみると

1. Fibrationの連続写像によるpull-backはまたfibrationになる。

2. 任意の連続写像はfibrationに取り替えられる。

3. 連続写像$f : X \longrightarrow Y$に対し, homotopy fiber列

$$\begin{aligned}\cdots \longrightarrow \Omega^n F_f \longrightarrow \Omega^n X \longrightarrow \Omega^n Y &\longrightarrow \Omega^{n-1} F_f \longrightarrow \cdots \\ \cdots &\longrightarrow \Omega F_f \longrightarrow \Omega X \longrightarrow \Omega Y \longrightarrow F_f \longrightarrow X \longrightarrow Y\end{aligned}$$

がある。

4. $p : E \longrightarrow B$を基点付きのfibrationでFをfiberに持つも のとし, Xを基点付きの空間とする。このとき$n \geq 1$である整数n に対し

$$[X, \Omega^n F]_* \stackrel{(\Omega^n i)_*}{\longrightarrow} [X, \Omega^n E]_* \stackrel{(\Omega^n p)_*}{\longrightarrow} [X, \Omega^n B]_*$$

はexactである。

5. $f : X \longrightarrow Y$を基点を保つ写像とし, Zを任意の基点付き の空間とする。するとfの homotopy fiber列から誘導される列

$$\begin{aligned}\cdots \longrightarrow [Z, \Omega^n F_f]_* \longrightarrow [Z, \Omega^n X]_* \longrightarrow [Z, \Omega^n Y]_* &\longrightarrow [Z, \Omega^{n-1} F_f]_* \longrightarrow \cdots \\ \cdots &\longrightarrow [Z, \Omega F_f]_* \longrightarrow [Z, \Omega X]_* \longrightarrow [Z, \Omega Y]_*\end{aligned}$$

は群のexact sequenceである。

となる。5番目は3番目と4番目から出るので, 最初の四つについてcofibrationで も同じ様な結果があるか考えよう。

- 1番目について。

まずpull-backに対応するもの, つまりpull-backのdual, を探さなければならな い。様々な空間や写像を扱った経験があり, どういうものとどういうものが双対 的(dual)になっているという例をいくつか知っていると, ここで「たぶんこうい うものがpull-backのdualになるのではないか」と予測がたてられるのであるが, 残念ながらこのnoteではいままで双対性(duality)について述べたことはなかっ た。そこで結果だけ述べることにする。

定義 1.10.1. 連続写像

$$\begin{aligned} f &: X \longrightarrow Y \\ g &: X \longrightarrow Z \end{aligned}$$

に対し, $Y \amalg Z$を$x \in X$に対し$f(x) \sim g(x)$という関係で割った空間

$$Y \cup_X Z = Y \amalg Z / \sim$$

をfとgによるYとZのX上のpush-outという。

Cofibrationのpush-outがfibrationのpull-backに対応するものである。

命題 1.10.2. $i : A \hookrightarrow X$が*cofibration*なら, 任意の連続写像

$$f : A \longrightarrow Y$$

に対し

$$i_*(f) : Y \longrightarrow X \cup_A Y$$

を$i_*(f)(y) = y$で定義すると, $i_*(f)$は*cofibration*であり

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "i_*(f)"] & X \cup_A Y \end{tikzcd}$$

を可換にする。

演習問題 1.10.3. これを証明せよ。またProposition 1.4.3の証明と比べてみよ。

Push-outは和集合の商空間として定義されたが, pull-backは直積空間の部分空 間として定義されていた。一般に空間の双対性(duality)について次の規則があ る。

$$
\begin{array}{rcl}
X \times Y & \Longleftrightarrow & X \amalg Y \\
X \wedge Y & \Longleftrightarrow & X \vee Y \\
\text{部分空間} & \Longleftrightarrow & \text{商空間} \\
\text{fibration} & \Longleftrightarrow & \text{cofibration} \\
\text{pull-back} & \Longleftrightarrow & \text{push-out} \\
& \vdots &
\end{array}
$$

- 2番目について。

Fibrationの時のように, 任意の連続写像はcofibrationに変形できる。

定義 1.10.4. 連続写像$f : X \longrightarrow Y$に対し, fのmapping cylinderを

$$Z_f = Y \amalg X \times I / \sim$$

で定義する。ここで$\sim$は, $x \in X$に対し

$$f(x) \sim (x, 0)$$

で定義される関係である。また

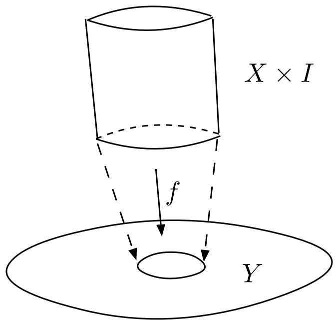
$$
\begin{array}{rcl}
i & : & X \hookrightarrow Z_f \\
r & : & Z_f \longrightarrow Y \\
j & : & Y \hookrightarrow Z_f
\end{array}
$$

を

$$
\begin{array}{rcl}
i(x) & = & (x, 1) \\
r(x, t) & = & f(x) \quad (x, t) \in X \times I \\
r(y) & = & y \quad y \in Y \\
j(y) & = & y
\end{array}
$$

で定義する。

fのmapping cylinder Z_fとは, YにX上のcylinder (柱) $X \times I$を fで張り付けたものである。



定理 1.10.5. 連続写像

$$f : X \longrightarrow Y$$

について次のことが成り立つ。

1. $i : X \longrightarrow Z_f$は*cofibration*である。

2. rは次の図式

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "="] \arrow[d, "i"] & X \arrow[d, "f"] \\ Z_f \arrow[r, "r"] & Y \end{tikzcd} \tag{1.13}$$

   を可換にし$i \simeq j \circ f$である。

3. rとjは互いに*homotopy inverse*であり, $r \circ j$とid_Y, $j \circ r$とid_{Z_f}の間の*homotopy* H, H'はそれぞれ

$$\begin{tikzcd} X \times I \arrow[r, "pr_1"] \arrow[d, "f \times id"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \times I \arrow[r, "H"] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \times I \arrow[r, "pr_1"] \arrow[d, "i \times id"] & X \arrow[d, "i"] \\ Z_f \times I \arrow[r, "H'"] & Z_f \end{tikzcd}$$

   を可換にするように取れる, ここでpr_1は第一成分への射影である。

証明. まずiがcofibrationであることを示す。

$$\begin{aligned} \varphi &: Z_f \longrightarrow Z \\ H &: X \times I \longrightarrow Z \end{aligned}$$

で$x \in X$に対し

$$H(x, 0) = \varphi(i(x)) = \varphi(x, 1)$$

であるものが与えられたとき,

$$\widetilde{H} : Z_f \times I \longrightarrow Z$$

を$y \in Y$に対し

$$\widetilde{H}(y,t) = \varphi(y)$$

$(x,s) \in X \times I$に対し

$$\widetilde{H}((x,s),t)) = \begin{cases} H(x, t-2(1-s)) & t \geq 2(1-s) \\ \varphi(x, \frac{2s}{2-t}) & t \leq 2(1-s) \end{cases}$$

で定義する。

1. $\widetilde{H}$がwell-defined
2. $\widetilde{H}|_{X \times I} = H$
3. $\widetilde{H}|_{Z_f \times \{0\}} = \varphi$

を示さなければならないが, それは面倒なので読者の演習問題としておこう。(1.13)の可換性と$j \circ f \simeq i$となることも読者に任せる。

次にrとjがhomotopy inverseであることであるが, 容易にわかるように $r \circ j = id_Y$だから, $r \circ j$とid_Yの間のhomotopy Hとして第一成分への射影pr_1を取ればよい。$j \circ r$を調べると

$$\begin{cases} (j \circ r)(y) = j(y) = y & y \in Y \\ (j \circ r)(x,s) = j(f(x)) = f(x) & (x,s) \in X \times I \end{cases}$$

となっているから, $j \circ r$とid_{Z_f}の間のhomotopy H'として

$$\begin{cases} H'(y,t) = y & y \in Y \\ H'((x,s),t) = (x, st) & (x,s) \in X \times I \end{cases}$$

と定義すればよい。このH'が求める性質をみたしていることを確かめるのは, 読者に任せる。 □

定義 1.10.6. 上のTheoremのように, 連続写像

$$f : X \longrightarrow Y$$

に対しcofibration

$$i : X \hookrightarrow Z_f$$

を作ることをfをcofibrationで取り替える という。このときiのcofiberをfのmapping cone或い はhomotopy cofiberといいC_fと書く。

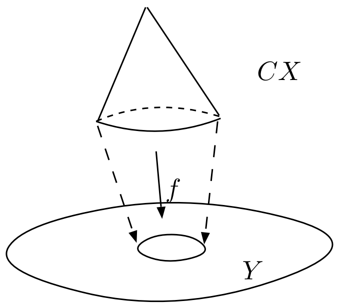
もっと直接的にC_fを書くと

補題 1.10.7. $CX = X \times I / X \times \{0\}$を$X$上の*cone* (錐)としたとき,

$$C_f = Y \amalg CX / \sim$$

ここで$(x,0) \sim f(x)$である。

つまりfのmapping coneは, YにX上のconeをfで張り付けたものである。



次に基点付きの場合を考えよう。連続写像をfibrationで取り替えるときには, 基点のついている場合とついていない場合を区別する必要はなかった。基点を保 つ連続写像

$$f : X \longrightarrow Y$$

に対し

$$p : E_f \longrightarrow Y$$

は基点付きfibrationでもあったのである。残念ながらcofibrationの場合にはそ ういう訳にはいかない。fが基点を保つ写像でも, 上で考えた

$$i : X \hookrightarrow Z_f$$

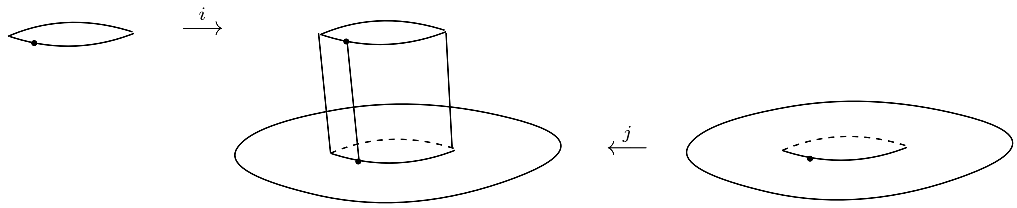
は基点付きcofibrationになっていないのである。一番問題なのは, iとjが 共に基点を保つようにZ_fの基点を取ることが不可能なことである。例えば,

$$i : X \hookrightarrow Z_f$$

が基点を保つ写像になるように$(*,1)$をZ_fの基点としよう。すると

$$j : Y \hookrightarrow Z_f$$

が基点を保たなくなる。jが基点を保つようにYの基点をZ_fの基点とする と, 今度は, iが基点を保たなくなる。



この問題を避けるための一つの方法は, $(*,1)$とYの基点を同一視してしまう ことである。ついでにその二点の間にある“線分上の点”も同一視してしまおう。

定義 1.10.8. $f : X \longrightarrow Y$が基点を保つ写像の時,

$$\widetilde{Z}_f = Z_f / \{*\} \times I$$

とおき, fのreduced mapping cylinderと いう。また

$$\widetilde{C}_f = C_f / \{*\} \times I$$

をfのreduced mapping coneという。

Theorem 1.10.5の基点付き版もある。

定理 1.10.9. *$f : X \longrightarrow Y$が基点を保つ写像なら, Theorem 1.10.5 でZ_fを$\widetilde{Z}_f$で置き換え, 写像とhomotopyを全て基点付きにし たものが成り立つ。*

証明. Theorem 1.10.5の場合とほとんど同じなので省略。 □

- 3番目について。

Fibrationの時と同じように上の構成を続けていけば, 自然にcofibrationの長い 列ができるはずである。以下の構成では, fibrationの時の構成と比べながら読 むと何をしているのか分かりやすいだろう。

Fibrationの時と同様に基点付きの場合のみ考える。

$$f : X \longrightarrow Y$$

を基点を保つ写像とする。Theorem 1.10.9より

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{j} \widetilde{C}_f$$

という列で$\widetilde{C}_f$がfのhomotopy cofiber (定義!!)であるものが できた。次の三項を考えるために, 写像

$$j : Y \longrightarrow \widetilde{C}_f$$

を考える。

補題 1.10.10. *$j : Y \longrightarrow \widetilde{C}_f$は, 基点付きcofibrationである。*

演習問題 1.10.11. これを証明せよ。

このLemmaにより, jをcofibrationに取り替える必要はなくなった。Cofiberも 簡単にわかる。

補題 1.10.12. *jのcofiberはΣXである。*

証明. jはYを$\widetilde{C}_f$の底に入れる写像だから,

$$\begin{aligned} j\text{のcofiber} &= \widetilde{C}_f/Y \\ &= ((Y \amalg (X \times I)/(X \times \{1\} \cup \{*\} \times I)) / \sim) / Y \\ &= X \times I / X \times \{0,1\} \cup \{*\} \times I \\ &= \Sigma X \end{aligned}$$

となる。 □

Fibrationの時のように, 次の段階は少しややこしい。一つ前に戻ってjを cofibrationで取り替える。

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d, "\parallel"] & \widetilde{Z}_j \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \widetilde{C}_j \\ Y \arrow[r, "j"] & \widetilde{C}_f \arrow[r] & \Sigma X \end{tikzcd} \tag{1.14}$$

上の列(1.14)で真ん中の縦の写像がhomotopy同値 $\widetilde{C}_f \simeq \widetilde{Z}_j$であることはすぐにわかる。次の縦 の写像も直接homotopy同値であることが示せるが, より一般に次の結果(Proposition 1.10.14)がある。Fibraitonの時の構成を思い出すと, fiberの 間のhomotopy同値を出すためにfiber homotopy同値の概念が重要だった。 Proposition 1.10.14を述べるために, cofibrationについて同様な概念が必要 になる。

定義 1.10.13. 二つのcofibration

$$\begin{array}{ccc} A & \hookrightarrow & X \\ A & \hookrightarrow & X' \end{array}$$

がcofiber homotopy同値であるとは, 次の図式

$$\begin{array}{ccccccc} A & = & A & \quad & A & = & A \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & X' & & X' & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

を可換にする写像fとgがあり, $g \circ f$と$f \circ g$は次の図式を可換に するようなhomotopy HとH'でそれぞれid_Xと$id_{X'}$にhomotopicであ ることと定義する。

$$\begin{array}{ccc} A \times I & \xrightarrow{pr_1} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \times I & \xrightarrow{H} & X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A \times I & \xrightarrow{pr_1} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' \times I & \xrightarrow{H'} & X' \end{array}$$

命題 1.10.14. *$A \hookrightarrow X$と$A \hookrightarrow X'$が互いにcofiber homotopy同 値なcofibrationなら, そのcofiberはhomotopy同値である。またそのhomotopy 同値を与える写像は次の図式を可換にするように取れる。*

$$\begin{array}{ccc} A & = & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \simeq & X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X/A & \simeq & X'/A \end{array}$$

もう一度(1.14)に戻ると, 合成写像

$$\widetilde{C}_f \longrightarrow \widetilde{Z}_j \longrightarrow \widetilde{C}_j$$

がcofibrationでありそのcofiberが

$$\widetilde{C}_j/\widetilde{C}_f = \Sigma Y$$

であることがわかる。これで写像と空間の列

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{j} \widetilde{C}_f \longrightarrow \Sigma X \longrightarrow \Sigma Y$$

で

1. $\widetilde{C}_f$はfのhomotopy cofiber

2. ΣXはjのcofiber

3. ΣYは$\widetilde{C}_f \longrightarrow \Sigma X$のcofiberとhomotopy同値

であるものができた。Fibrationの時のように, このようなものに名前をつける。

定義 1.10.15. 空間と写像の列

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} W$$

がhomotopy cofiber列であるとは, fのhomotopy cofiberがgによりWとhomotopy同値になることである。基点付きの場合も同 様に定義する。

上の構成を続けていけば, 無限に続くhomotopy cofiber列が得られる。

定理 1.10.16. 任意の基点を持つ写像$f : X \longrightarrow Y$に対し, 基点付き空間と基点 を保つ写像の列

$$\begin{aligned} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{j} \widetilde{C}_f \longrightarrow \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y \xrightarrow{\Sigma j} \Sigma\widetilde{C}_f \quad \longrightarrow \quad \cdots \\ \cdots \longrightarrow \Sigma^{n-1}\widetilde{C}_f \quad \longrightarrow \quad \Sigma^n X \xrightarrow{\Sigma^n f} \Sigma^n Y \xrightarrow{\Sigma^n j} \Sigma^n \widetilde{C}_f \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

でどの連続する三項も*homotopy cofiber*列になっているものが存在する。

定義 1.10.17. このTheoremに現れた列をfのhomotopy cofiber列 という。

- 4番目について。

証明したいことは, 基点付きcofibration

$$A \hookrightarrow X$$

と基点付き空間Zに対し

$$[\Sigma^n(X/A), Z]_* \longrightarrow [\Sigma^n X, Z]_* \longrightarrow [\Sigma^n A, Z]_*$$

が$n \geq 1$の時, 群のexact sequecneになっていることである。

まず基点付き空間XとYに対しhomotopy集合$[\Sigma X, Y]_*$が群になってい ることを示さなければならない。これは直接示してもよいが, 次のようにloop空 間の場合に帰着させた方が簡単である。

補題 1.10.18. 任意の基点付き空間XとYに対し, *homotopy*集合$[\Sigma X, Y]_*$は群になる。

証明. Theorem 1.7.5により,

$$\mathrm{Map}_*(X \wedge Z, Y) = \mathrm{Map}_*(X, \mathrm{Map}_*(Z, Y))$$

である。$Z = S^1$とおくと,

$$\mathrm{Map}_*(\Sigma X, Y) = \mathrm{Map}_*(X \wedge S^1, Y) = \mathrm{Map}_*(X, \mathrm{Map}_*(S^1, Y)) = \mathrm{Map}_*(X, \Omega Y)$$

となる。つまりΣXからYへの基点を保つ写像は, XからΩYへの基点を保つ写像と同一視できる。Homotopy類を取れば

$$[\Sigma X, Y]_* = [X, \Omega Y]_*$$

を得る。Corollary 1.8.11より$[X, \Omega Y]_*$は群になるので, 上の同一視により$[\Sigma X, Y]_*$も群の構造を持つ。 □

定理 1.10.19. 基点付き*cofibration*

$$A \hookrightarrow X$$

と基点付き空間Zに対し

$$[\Sigma^n(X/A), Z]_* \longrightarrow [\Sigma^n X, Z]_* \longrightarrow [\Sigma^n A, Z]_*$$

は$n \geq 1$の時, 群の*exact sequence*になっている。

証明. これも直接証明できるが, loop空間(つまりfibration)の場合に帰着させた方が ずっと簡単である。Corollary 1.9.6より, $A \hookrightarrow X$ が基点付きcofibrationなら

$$\mathrm{Map}_*(X, Z) \longrightarrow \mathrm{Map}_*(A, Z)$$

は$\mathrm{Map}_*(X/A, Z)$をfiberとする基点付きfibrationである。Corollary 1.8.20より, exact sequence

$$\pi_n(\mathrm{Map}_*(X/A, Z)) \longrightarrow \pi_n(\mathrm{Map}_*(X, Z)) \longrightarrow \pi_n(\mathrm{Map}_*(A, Z))$$

を得るが, Theorem 1.7.5より

$$\begin{aligned}
\pi_n(\mathrm{Map}_*(Y, Z)) &= [S^n, \mathrm{Map}_*(Y, Z)]_* \\
&= [S^n \wedge Y, Z]_* \\
&\cong [Y \wedge S^n, Z]_* \\
&\cong [\Sigma^n Y, Z]_*
\end{aligned}$$

となり, 求めるexact sequence

$$\begin{array}{ccccc}
\pi_n(\mathrm{Map}_*(X/A, Z)) & \longrightarrow & \pi_n(\mathrm{Map}_*(X, Z)) & \longrightarrow & \pi_n(\mathrm{Map}_*(A, Z)) \\
\| & & \| & & \| \\
[\Sigma^n(X/A), Z]_* & \longrightarrow & [\Sigma^n X, Z]_* & \longrightarrow & [\Sigma^n A, Z]_*
\end{array}$$

を得る。 □

Theorem 1.10.16とTheorem 1.10.19を合わせると次の結果を得る。

系 1.10.20. 基点を保つ写像$f : X \longrightarrow Y$と基点付きの空間Zに対し, 群の *exact sequence*

$$\cdots \longrightarrow [\Sigma^n \widetilde{C}_f, Z]_* \longrightarrow [\Sigma^n Y, Z]_* \longrightarrow [\Sigma^n X, Z]_* \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow [\Sigma^2 X, Z]_* \longrightarrow [\Sigma \widetilde{C}_f, Z]_* \longrightarrow [\Sigma Y, Z]_* \longrightarrow [\Sigma X, Z]_*$$

がある。

最後にCorollary 1.8.29に対応する結果を書いておこう。

命題 1.10.21. *Cofibration* $A \hookrightarrow X$と連続写像$f : X \longrightarrow Y$に対し, 合成

$$A \hookrightarrow X \longrightarrow Y$$

が*null-homotopic*なら, 連続写像

$$\tilde{f} : X/A \longrightarrow Y$$

で次の図式を可換にするものが存在する。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d] \arrow[dr, "\simeq *"] & \\ X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \\ X/A \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

演習問題 1.10.22. これを証明せよ。

これは次の形で使われることが多い。

系 1.10.23. 連続写像$f : X \longrightarrow Y$と$g : Y \longrightarrow Z$に対し, 合成 $g \circ f$が*null-homotopic* $g \circ f \simeq *$ならgの拡張

$$\tilde{g} : C_f \longrightarrow Z$$

が存在する。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "\simeq *"] & \\ Y \arrow[r, "g"] \arrow[d] & Z \\ C_f \arrow[ur, dotted, "{}^{\exists}\tilde{g}"'] & \end{tikzcd}$$

基点付きの場合も同じことが成り立つ。

2　準ファイバー空間とその応用

2.1　準ファイバー空間とは?

§1.2ではfiber bundleの一般化としてSerre或いはHurewicz fibrationを導入したが，この章ではそれの更なる一般化を考えることにしよう。 動機は次の通りである。Universal bundleの構成 (§??,§??) の時にみたように，空 間のhomotopy群の ことがわかると様々な有用な結果が得られる。また一般にトポロジーの手法で 空間の性質を調べようとしても，homotopy群(やhomology群)のことまでしかわか らないことが多いのである。例えば写像

$$f : X \longrightarrow Y$$

が与えられたとき，fが同相，或いはもっと弱めてhomotopy同値になることを 示すためには，逆写像やhomotopy inverseを見付けなければならない。しかしな がら，一般に思い通りの性質を持った連続写像を見付けることは非常に難しい。 ところが，fがhomotopy群の同型を誘導すること(つまり弱同値 であること)を証明するだけなら連続写像 をみつけなくてもよい。例えば，homotopy群が同じ位数の巡回群なら，生成元を 写した先が生成元になっていることを示せばよい。そこでfibrationの持つ性質 の中でhomotopy群に関するもの，つまりhomotopy群のlong exact sequenceが成 り立つだけのものを考えても，かなり使い道がありそうである。それが quasifibrationと呼ばれるもので，ある意味ではfiber bundleの(homotopy論の 中での)最も一般化された形といってよいだろう。

Quasifibrationの重要性は，単にfibrationについての結果の一般化を与える だけではなく，具体的に空間を用いて様々な重要な構成をするときに必然的に 現れることからも分かる。例えば§??のMilgramによる分 類空間の構成は topological monoid Mに対してもそのまま適用できるが，その際には

$$p : E_\infty M \longrightarrow B_\infty M$$

はquasifibrationであることしかわからないのである。

QuasifibrationはDoldとThomの論文[DT58]で導入され，基本的な性質 も既にそこで調べられている。現在でも[DT58]はquasifibrationに関 する最も基本的な文献である。

Quasifibrationに関する解説としては, 日本語で は[西田吾85]が唯一の文献であると思われる。英語では Peter Mayの論文 [May90]がよくまとまっている。

ここでは以上の三つの文献に従って, §2.2と§2.3で quasifibrationについての基本事項を解説したあと, §2.4と §2.5でquasifibrationの応用として重要な例である無限対称積, そしてlittle cubeの空間によるloop空間の構成を簡単に見る。

2.2 準ファイバー空間

Quasifibrationを考える前に, 少しfibrationのことを思い出そう。Hurewicz fibration

$$p : E \longrightarrow B$$

が与えられたとき, Bが弧状連結ならば任意の点$x \in B$に対しx上のfiber $F_x = p^{-1}(x)$とhomotopy fiber $F_{p,x}$とはhomotopy同値であった。 (Corollary 1.5.6)

$$F_x \simeq F_{p,x}$$

このhomotopy同値を与える写像

$$i : F_x \longrightarrow F_{p,x}$$

は, 具体的には

$$i(y) = (y, c_x)$$

で与えられていた。ここでc_xはxへのconstant loopである。Serre fibrationの場合には, iはhomotopy同値を与えるとは限らないが, 少なくとも homotopy群の同型

$$i_* : \pi_*(F_x) \cong \pi_*(F_{p,x})$$

を与える。Serre fibrationの更なる一般化を考えるときに, この性質を定義と して使うのはきわめて自然である。このような, ホモトピー群の間の写像を誘導 する写像は弱同値と呼ばれる。

定義 2.2.1. 連続写像

$$f : X \longrightarrow Y$$

がn同値(n-equivalence)である とは, 任意の点$x \in X$に対し誘導された準同形

$$f_* : \pi_k(X, x) \longrightarrow \pi_k(Y, f(x))$$

に対し次が成り立つことである。

$$\begin{aligned} 0 \le k < n \quad &\Longrightarrow \quad f_* : \text{全単射} \\ k = n \quad &\Longrightarrow \quad f_* : \text{全射} \end{aligned}$$

空間対の写像

$$f:(X,A)\longrightarrow(Y,B)$$

がn同値であるとは, 次の二つの条件が成り立つことである。

1. π_0で誘導された写像

   $$f_*: \pi_0(X)\longrightarrow\pi_0(Y)$$

   について次が成り立つ。

   $$f_*^{-1}(\mathrm{Im}(\pi_0(B)\longrightarrow\pi_0(Y)))=\mathrm{Im}(\pi_0(A)\longrightarrow\pi_0(X))$$

2. 任意の$a\in A$に対し, 誘導された準同形

   $$f_*:\pi_k(X,A,a)\longrightarrow\pi_k(Y,B,f(a))$$

   が次をみたす。

   $$\begin{aligned}0<k<n &\quad\Longrightarrow\quad f_*:\text{全単射}\\ k=n &\quad\Longrightarrow\quad f_*:\text{全射}\end{aligned}$$

任意のnに対しn同値であるとき弱同値(weak equivalence)または弱ホモトピー同値 という。

注意 2.2.2. 上で定義された弱同値の概念は, 空間の間の関係と考えると同値関係ではない。 上の関係を同値関係に拡張したものも弱同値または弱ホモトピー同値という。

定義 2.2.3. 連続な写像

$$p:E\longrightarrow B$$

は, 次の条件をみたすとき quasifibration (準ファイ バー空間)という。

1. pは全射

2. 任意の$x\in B$に対し

   $$p:(E,p^{-1}(x))\longrightarrow(B,x)$$

   は弱同値

Fibrationの時と同様に, Bをbase space, Eをtotal space, $p^{-1}(x)$をx上のfiber, pを 射影という。

よって定義から次が分かる。

系 2.2.4. *Serre fibrationはquasifibrationである。*

系 2.2.5. $p : E \longrightarrow B$が*quasifibration*なら, 任意の$x \in B$と $y \in F = p^{-1}(x)$に対し, 次の*homotopy*群の*long exact sequence*

$$\begin{aligned}\cdots \longrightarrow \pi_n(F,y) \longrightarrow \pi_n(E,y) &\longrightarrow \pi_n(B,x) \longrightarrow \pi_{n-1}(F,y) \longrightarrow \cdots \\ \cdots &\longrightarrow \pi_1(B,x) \longrightarrow \pi_0(F,y) \longrightarrow \pi_0(E,y) \longrightarrow \pi_0(B,x)\end{aligned}$$

がある。

Example 1.2.5でfibrationであってfiber bundleでないものを考えた ように，ここでquasifibrationであってfibrationではないものを考えよう ([DT58]による)。

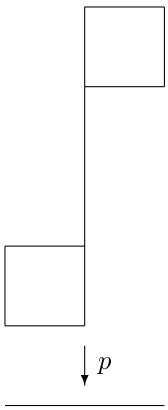
例 2.2.6. 次で与えられる$\mathbb{R}^2$内の領域Eを考える。

$$E = [-1,0] \times [-2,-1] \cup \{0\} \times [-2,2] \cup [0,1] \times [1,2]$$

$B = [-1,1]$とし，

$$p : E \longrightarrow B$$

をx成分への射影とする。



これがcovering homotopy propertyを持たないことは, 容易に分かる。例えば, 恒等写像で与えられるB内の道

$$\ell : [-1,1] \longrightarrow B$$

はliftを持たない。よってこれはfibrationではないが，quasifibrationにはな るのである。EもBも各fiberも弧状連結なので, そのためには, 任意の fiber Fに対し

$$\pi_*(E,F) \cong \pi_*(B)$$

を示せばよいが, EもFも可縮なことから対のhomotopy long exact sequenceにより

$$\pi_*(E,F) \cong 0$$

であり, 一方Bも可縮だから

$$\pi_*(E,F) \cong 0 \cong \pi_*(B)$$

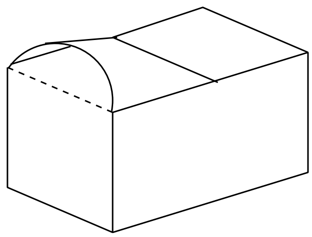
である。 □

Fiber bundleの様々な性質が少し弱い形で(正確には, “$\cong$”を “$\simeq$”で置き換えた形で) fibrationでも成り立っていたように, fibrationの持っていた性質に似たものがquasifibrationでも成り立っている と期待する読者もいるかもしれない。実際Corollary 2.2.5の homotopy群のlong exact sequenceはそういう性質の内の一つであるが, 残念 ながら全ての性質がそうであるわけではない。例えば, fiber bundleや fibrationを調べる際に重要だったpull-backについての性質は, quasifibrationでは成り立たないのである。つまり, quasifibrationの pull-backはquasifibrationになるとは限らない。

例 2.2.7. 次の空間を考える。

$$\begin{aligned} E &= ([-1,1]\times[-1,1]\times[0,1] - [-1,1]\times[0,1]\times\{1\}) \\ &\quad \cup\{(x,y,yz+1) | x^2+z^2=1, -1\le x\le 1, 0\le y\le 1, z\ge 0\} \end{aligned}$$

つまりEは, $[-1,1]\times[-1,1]\times[0,1]$の上の皮を側面から剥れない ようにして途中まで剥して膨らませたものである。



$B=[-1,1]\times[-1,1]\times[0,1]$と置いて, 膨らんだ皮を押しつぶす射影

$$p : E \longrightarrow B$$

を考えると, これはquasifibrationになる。それは各fiberが一点であり, E もBも可縮であるからである。

ところがpを$[-1,1]\times\{1\}\times[0,1]$に制限する, つまりinclusion

$$i : [-1,1]\times\{1\}\times[0,1] \hookrightarrow B$$

でpull-backを取ると, これはquasifibrationにはならないのである。それを 見るために, $B'=[-1,1]\times\{1\}\times[0,1]$とし, pのB'への制限を

$$p' : E' \longrightarrow B'$$

とする。これがもしquasifibrationだとすると任意の点$a \in B'$に対し

$$\pi_*(E', {p'}^{-1}(a)) \cong \pi_*(B')$$

とならなければならないが, ${p'}^{-1}(a)$が一点, B'が可縮なことより,

$$\pi_*(E') = 0$$

となる。ところが, すぐ分かるように

$$E' \simeq S^1$$

なので

$$\pi_1(E') \neq 0$$

である。よってp'はquasifibrationではない。 □

Fiber bundle, あるいはfibrationのときには, pull-backを使って新しい fiber bundleやfibrationを作るという操作を何度となく行ってきた。 Quasifibrationのpull-backがquasifibrationとは限らないとなると, 知って いるquasifibrationから新しいquasifibrationを作るのが少し難しくなる。その 際によく使われるのが, 次のsectionのDold-Thomの判定条件である。

2.3 Dold-Thomの判定条件

前のsectionでみたように, quasifibrationを扱うときに最も気をつけなければな らない点はpull-backで保存されないことである。特に, 写像

$$p : E \longrightarrow B$$

がquasifibrationであっても, その制限

$$p|_{p^{-1}(U)} : p^{-1}(U) \longrightarrow U$$

はquasifibrationになっているとは限らない。しかしながら, その逆はどうだろう。つまり開 被覆

$$B = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

を考え, 各U_α上への制限

$$p|_{p^{-1}(U_\alpha)} : p^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha$$

がquasifibrationになっているときにpはquasifibrationだろうか?

この問題を考える際に次の言葉を用いるのが便利である。

定義 2.3.1. 連続な写像
$$p : E \longrightarrow B$$
に対し, $U \subset B$がdistinguishedであるとは,
$$p|_{p^{-1}(U)} : p^{-1}(U) \longrightarrow U$$
がquasifibrationであることと定義する。

開集合が順番に大きくなっている場合は大丈夫である。

補題 2.3.2. *$\mathcal{O}$をBの開被覆で包含関係を順序として全順序集合になっているも のとする。このとき任意の$U \in \mathcal{O}$が$p : E \longrightarrow B$ に対しdistinguishedならばBはdistinguishedである。*

証明. Lemma ??の開集合版を用いればよい。任意の位相空間は開被覆 に関しweak topologyを持っていることに注意する。 □

典型的な反例は[DT58]にある。

例 2.3.3. $B = [-2,2] \times [-1,1]$としEをBの真中に切り目を入れた空間とする。 正確には$\mathbb{R}^3$の中で
$$\begin{aligned} E &= ([-2,2] \times [-1,1] - [-1,1] \times [0,1]) \times \{0\} \\ &\quad \cup \{(x, y, (1-y)z+1) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + z^2 = 1, -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, z \geq 0\} \end{aligned}$$
で定義される。
$$p : E \longrightarrow B$$
を膨らんだ部分を潰す射影とする。
$$\begin{aligned} U &= \{(x, y, 0) \in B | x < 1\} \\ V &= \{(x, y, 0) \in B | x > -1\} \end{aligned}$$
とおくと, UもVもdistinguishedなBの開集合である。しかしBは distinguishedではない。 □

上の例では$U \cap V$はdistinguishedではない。つまり共通部分でおかしくなっ ているのである。Fiber bundleは, 直積になっている空間を共通部分で座標変換 という写像でうまく貼り合わせたものとして定義されていたが, quasifibration の場合も, 共通部分でうまく貼り合わさっているという条件が必要である。

実際, DoldとThomは[DT58]で次の結果を得た。

定理 2.3.4 (Dold-Thom Criterion (Dold-Thomの判定条件)). *$p : E \longrightarrow B$を連続写像とし, 次の条件を満たすBのopen covering $\mathcal{O}$が存在したとする。*

1. $U, V \in \mathcal{O} \Longrightarrow U \cap V \in \mathcal{O}$

2. 各$U \in \mathcal{O}$は*distinguished*

このとき, pも*quasifibration*になる。

Dold-Thomの論文[DT58]はドイツ語で書かれているのでちょっと読む 気がしない。幸い[西田吾85] に日本語の証明があるので日本人にとっては 非常に助かる。ここで同じことを繰り返してもしかたないので, ここではMayの論文 [May90]の証明を紹介する。この論文ではquasifibrationの基本的な性質が 弱同値に関するある命題に帰着されることが示されており, 非常に読みやすい。 一読をおすすめする。

さて, 証明は$\mathcal{O}$が二個の場合に帰着される。

定義 2.3.5. 位相空間Xとその部分空間A, Bについて

$$X = \mathrm{Int}A \cup \mathrm{Int}B$$

であるとき$(X; A, B)$はexcisive triadという。

命題 2.3.6. 連続写像

$$p : E \longrightarrow B$$

を考える。$(B; B_1, B_2)$が*excisive triad*でB_1とB_2と$B_1 \cap B_2$が *distinguished*ならばBも*distinguished,* つまりpは*quasifibration*である。

Proof of Theorem 2.3.4. Bの部分集合族$\mathcal{C}$を次で定義する。

$$V \in \mathcal{C} \Longleftrightarrow \begin{cases} 1. & V = \bigcup_{U \in \mathcal{O}'} U \text{ for some } \mathcal{O}' \subset \mathcal{O} \\ 2. & V \text{ はdistinguished} \\ 3. & V \cap W \text{ はdistinguished for any } W \in \mathcal{O} \end{cases}$$

このとき包含関係で順序を定義すれば, Lemma 2.3.2より $\mathcal{C}$は帰納的順序集合になる。 よってZornの補題により, 極大元を持つ。それをVとしよう。$B \neq V$なら, $\mathcal{O}$がBの開被覆であることから$U \in \mathcal{O}$でVに含まれ ていないものが存在する。するとProposition 2.3.6より $V \cup U \in \mathcal{C}$となり, Vの極大性に反する。 □

Proposition 2.3.6の証明は, 次の弱同値に関する定理に帰着される。

定理 2.3.7 ([May90]). *Excisive triad*の間の写像

$$f : (X; X_1, X_2) \longrightarrow (Y; Y_1, Y_2)$$

を考える。$i = 1, 2$に対し

$$f|_{X_i} : (X_i, X_1 \cap X_2) \longrightarrow (Y_i, Y_1 \cap Y_2)$$

がn同値ならば

$$f : (X, X_i) \longrightarrow (Y, Y_i)$$

も$i = 1, 2$に対しn同値である。

この定理の証明は省略する。Mayの論文を読まれたい。

Proof of Proposition 2.3.6. 仮定より任意の$b \in B_1 \cap B_2$に対し, pの制限

$$\begin{array}{rcl} (p^{-1}(B_1), p^{-1}(b)) & \longrightarrow & (B_1, \{b\}) \\ (p^{-1}(B_2), p^{-1}(b)) & \longrightarrow & (B_2, \{b\}) \\ (p^{-1}(B_1 \cap B_2), p^{-1}(b)) & \longrightarrow & (B_1 \cap B_2, \{b\}) \end{array}$$

は弱同値である。よってホモトピー群の完全列から$i = 1, 2$に対し

$$p : (p^{-1}(B_i), p^{-1}(B_1 \cap B_2)) \longrightarrow (B_i, B_1 \cap B_2)$$

は弱同値になる。上のTheoremより$i = 1, 2$に対し

$$p : (E, p^{-1}(B_i)) \longrightarrow (B, B_i)$$

は弱同値になるが, やはりホモトピー群の完全列を用いてpがquasifibration であることが分かる。 □

Dold-Thom criterionは実際には次の形で使われることが多い。そのためこれも Dold-Thom criterionという場合がある。

定理 2.3.8. *Bのfiltration $\{F_n B\}_{n \geq 0}$と連続写像*

$$p : E \longrightarrow B$$

が次の条件をみたすとする。

1. *Bは被覆$\{F_n B\}_{n \geq 0}$に関しweak topologyを持つ*
2. *各$n > 0$に対し包含写像*

   $$F_{n-1} B \hookrightarrow F_n B$$

   はcofibration
3. *$F_0 B$はdistinguished*
4. *各$n > 0$に対し, 任意の開集合$U \subset F_n B - F_{n-1} B$は distinguished*

5. 各$n > 0$に対し, $F_{n-1}B$のF_nBの中での開近傍U_nと写像

$$\begin{aligned} h &: U_n \times I \longrightarrow U_n \\ H &: p^{-1}(U_n) \times I \longrightarrow p^{-1}(U_n) \end{aligned}$$

で次の条件をみたすものが存在する*:*

a) hはU_nの$F_{n-1}B$への*deformation*

b) Hは$p^{-1}(U_n)$の$p^{F_{n-1}B}$への*deformation*

c) (H_1, h_1)は*fiber*を保つ写像

d) 各$b \in U_n$に対し

$$H_1 : p^{-1}(b) \longrightarrow p^{-1}(h_1(b))$$

は弱同値

このときpは*quasifibration*である。

2.4 無限対称積

前のsectionでは, fibrationの一般化としてquasifibrationというものを導入した。 そこでみたように, quasifibrationはfibrationの持っていた良い性質をかな り失ってしまっている。例えば, quasifibrationのpull-backは quasifibrationとは限らない。このような重要な性質を捨ててまで quasifibrationを導入するのにはそれなりの理由があるはずである。それは quasifibrationが様々な応用を持つからに他ならない。Quasifibrationの最初 の重要な応用は無限対称積(infinite symmetric product)についてのDoldと Thomの結果であろう。

まず対称積 (symmetric product) について考える。

定義 2.4.1. Σ_nをn次の対称群とする。任意の位相空間Xに対し, Σ_nの Xのn個の直積X^nへの作用

$$\mu : \Sigma_n \times X^n \longrightarrow X^n$$

を, 座標の置換, つまり$\sigma \in \Sigma_n$と$(x_1, \cdots, x_n) \in X^n$に 対し

$$\mu(\sigma; x_1, \cdots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)})$$

で定義する。

Xのn次対称積(n-fold symmetric product)を, X^nのこの作用による商空間

$$\mathrm{SP}^n(X) = X^n/\Sigma_n$$

として定義する。

$(x_1, \cdots, x_n) \in X^n$の代表する$\mathrm{SP}^n(X)$の類を$[x_1, \cdots, x_n]$ と書くことにしよう。

Symmetric productは, いろいろな状況で自然に現れてくるものである。最も自 然なのは次の例であろう。

例 2.4.2. 複素数係数のn次代数方程式を考える。

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

この方程式と係数を全てa_nで割った方程式

$$z^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} z^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} z + \frac{a_0}{a_n} = 0$$

は同じ根を持つから, monicな多項式, つまり最高次の係数が1であるもののみ考えることにする。

Monicなn次多項式$f(z)$が与えられたとき, その根として（重複も含めて） n個の複素数の組$(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$が決まる。しかしこの$n$個 の根を並べる順序はどうでもよくて, $f(z)$から実際に得られるのは順序を無 視したn個の複素数の組, つまり$\mathbb{C}$のn-fold symmetric productの元

$$[\alpha_1, \cdots, \alpha_n] \in \mathrm{SP}^n(\mathbb{C})$$

である。この対応により写像

$$R : \{\text{複素数係数のmonicな}n\text{次多項式}\} \longrightarrow \mathrm{SP}^n(\mathbb{C}) \tag{2.1}$$

が得られた。逆に$\mathrm{SP}^n(\mathbb{C})$の元が与えられれば, それを根に持つmonic多項式 はすぐ作れるから, これは明らかに全単射である。よって, 複素数係数の代数 方程式の根を考えることと, $\mathbb{C}$のsymmetric productの点を考えることは同じ ことである。このように, ある集合の元のn個の集まりを考えるとき, 順序を 考えなくてもよい, あるいは順序が決まらない場合にはsymmetric productの点 と考えるのが自然である。

ところで多項式は係数だけで決まるから

$$\{\text{複素数係数のmonicな}n\text{次多項式}\} = \mathbb{C}^n$$

よって

$$\mathrm{SP}^n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^n$$

という同一視を得た。 □

演習問題 2.4.3. 上の同一視を与える写像

$$\mathrm{SP}^n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

を具体的に構成し, それが同相写像である事を証明せよ。

このように$\mathbb{C}$のsymmetric productはあまり面白い空間ではないが, S^2の symmetric productとしては重要な空間が現れる。$\mathbb{C}$とS^2の関係で最も重要 なものは次の事実である。

補題 2.4.4. *S^2は$\mathbb{C}$のone point compactificationである。*

例 2.4.5. 上の同一視を用いてS^2のsymmetric productを考えよう。One point compactificationを取るときに付け加える点を∞と書く。よって

$$S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

と書ける。この点∞の解釈の仕方はいろいろあるが, 方程式の根を考える 上で最も便利なのは, 0でない点$z \in \mathbb{C}$に対し

$$\infty = \frac{z}{0}$$

と思う事である。これによりS^2の点は全て複素数の商として表される事にな る。つまり

$$S^2 = \left\{ \frac{z_0}{z_1} \middle| z_0\text{か}z_1\text{は}0\text{ではない。} \right\}$$

と書ける。ここで$a \in \mathbb{C} - \{0\}$に対し, $z_1 \neq 0$でも$z_1 = 0$でも

$$\frac{z_0}{z_1} = \frac{az_0}{az_1}$$

であるから, より正確には,

$$S^2 = \mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}/\sim \tag{2.2}$$

と書くべきである。ここで

$$(z_0, z_1) \sim (w_0, w_1) \Longleftrightarrow (w_0, w_1) = (az_0, az_1) \ \text{ for some } a \in \mathbb{C} - \{0\}$$

である。

少しS^2に深入りしてしまったが, ここでまた方程式の話に戻ろう。上の Exampleでは, monicな多項式を考えたが, 今度は係数に何も条件をつけない一 般の代数方程式

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0 \tag{2.3}$$

を考えよう。このとき問題は, 方程式が根を持たないかも知れない事である。例えば,

$$a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = 0, \ a_0 = 1 \tag{2.4}$$

のとき, 方程式は

$$1 = 0$$

となり根を持たない。これを解決するために, 形式的に$z = \frac{z_0}{z_1}$ と変数変換してみる。すると(2.3)は

$$a_n \left(\frac{z_0}{z_1} \right)^n + a_{n-1} \left(\frac{z_0}{z_1} \right)^{n-1} + \cdots + a_1 \frac{z_0}{z_1} + a_0 = 0$$

となる。両辺にz_1^nを掛けると

$$a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} z_1 + \cdots + a_1 z_0 z_1^{n-1} + a_0 z_1^n = 0 \tag{2.5}$$

という方程式が得られる。こうすれば(2.4)の場合でも,

$$z_1^n = 0$$

という方程式が得られ, $z_1 = 0$という(n重)根が得られる。このときz_0は 任意である。元のzに戻せば,

$$z = \frac{z_0}{z_1} = \frac{z_0}{0} = \text{“}\infty\text{”}$$

となる。つまり$\mathbb{C}$をそのone point compactification S^2に拡張して考える と, その中では(2.3)は, 常に根を持つのである。更に(2.3)がk次 ($k < n$)のとき, つまり

$$a_n = \cdots = a_{k+1} = 0,\ a_k \neq 0$$

のとき, (2.3)は

$$a_k z^k + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

のk個の根の他に$n-k$個の$z = \infty$という根を持つと思えば, 全ての係数が 0でない限りは(2.3)は常に(S^2内で)n個の根を持つ事になる。よって(2.1)の拡張である対応

$$\widetilde{R} : \{\text{複素数係数の}0\text{でない}n\text{次以下の多項式}\} \longrightarrow \mathrm{SP}^n(S^2)$$

が得られた。多項式を0でない定数倍しても根は変わらないから, $\widetilde{R}$は

$$\bar{R} : \{\text{複素数係数の}0\text{でない}n\text{次以下の多項式}\}/\mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathrm{SP}^n(S^2)$$

という対応を誘導する。ここで$\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} - \{0\}$の多項式への作用は, 普通のかけ算で与えられている。(2.1)の場合と同じように, $\bar{R}$は全単射である。従って, 一般の代数方程式の根の成す空間として S^2のsymmetric productが現れる事が分かった。また係数を対応させる事に より

$$\{\text{複素数係数の}0\text{でない}n\text{次以下の多項式}\} = \mathbb{C}^{n+1} - \{(0, \cdots, 0)\}$$

となるから, 結局

$$\mathrm{SP}^n(S^2) \cong \mathbb{C}^{n+1} - \{(0, \cdots, 0)\}/\mathbb{C} - \{0\}$$

という同一視が得られた。右辺の空間は, 演習問題 ?? に既に現れている。

$$\mathbb{C}\mathrm{P}^n \cong \mathbb{C}^{n+1} - \{(0, \cdots, 0)\}/\mathbb{C} - \{0\}$$

つまり n次元複素射影空間である。(2.2)より

$$S^2 \cong \mathbb{C}\mathrm{P}^1$$

だから, 結局

$$\mathrm{SP}^n(\mathbb{C}\mathrm{P}^1) \cong \mathbb{C}\mathrm{P}^n$$

という結果が得られた。上のExampleの場合と同様に, これは単に集合としての 対応ではなく位相空間としての同相である。 □

読者は気付いたかも知れないが, 上のExampleには少し曖昧な点がある。多項式

$$f(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$$

を持ってきたとき, これをn次以下の多項式と思っても良いし, $n+1$次以下の 多項式と思っても良い。つまり

$$\{\text{複素数係数の0でない}n\text{次以下の多項式}\}/\mathbb{C}-\{0\} = \mathbb{C}^{n+1}-\{(0,\cdots,0)\}/\mathbb{C}-\{0\} = \mathbb{C}\mathrm{P}^n$$

の同一視で, $f(z) \in \mathbb{C}\mathrm{P}^n$とも$f(z) \in \mathbb{C}\mathrm{P}^{n+1}$とも, 或いは任意の $k \geq n$に対し, $f(z) \in \mathbb{C}\mathrm{P}^k$とも思えるのである。この曖昧さをなくすた めに, $n \to \infty$とする。

定義 2.4.6. $(a_0,\cdots,a_n) \longmapsto (a_0,\cdots,a_n,0)$という対応により,

$$\mathbb{C}^{n+1} \subset \mathbb{C}^{n+2}$$

というinclusionを得る。これによって誘導されるinclusion

$$\mathbb{C}\mathrm{P}^n \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^{n+1}$$

によりunion

$$\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{C}\mathrm{P}^n$$

を取り, これを無限次元複素射影空間という。位相は, これまでにこのような unionに対して何度も使ったもの, つまりweak topologyである。

さて, 上の射影空間のinclusionに対応するsymmetric productのinclusion

$$\mathrm{SP}^n(\mathbb{C}\mathrm{P}^1) \subset \mathrm{SP}^{n+1}(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)$$

は, $[x_1,\cdots,x_n] \longmapsto [x_1,\cdots,x_n,\infty]$で与えられてい る事はすぐに分かる。よって, このinclusionにより

$$\mathrm{SP}^\infty(\mathbb{C}\mathrm{P}^1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{SP}^n(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)$$

として$\mathbb{C}\mathrm{P}^1 = S^2$のinfinite symmetric productを定義すると,

$$\mathrm{SP}^\infty(\mathbb{C}\mathrm{P}^1) = \mathbb{C}\mathrm{P}^\infty = \{\text{0でない複素数係数の多項式}\}/\mathbb{C}^\times$$

を得る。言い替えれば, $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$のinfinite symmetric product $\mathrm{SP}^\infty(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)$は, 0でない複素数係数の代数方程式の根全体の成す空 間である。

この場合, infinite symmetric productが定義できたのは, $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$に∞ という特別な点があったからであるが, 一般の位相空間でも特別な点, つまり基 点があればinfinite symmetric productは定義できる。

定義 2.4.7. Xを基点$*$を持つ位相空間とする。このときinclusion

$$\mathrm{SP}^n(X) \subset \mathrm{SP}^{n+1}(X)$$

を$[x_1, \cdots, x_n] \longmapsto [x_1, \cdots, x_n, *]$として定義し，これにより

$$\mathrm{SP}^\infty(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{SP}^n(X)$$

と定義する。これをXのinfinite symmetric productと言う。

位相は，$\{\mathrm{SP}^n(X)\}_{n\geq 1}$によるweak topologyで与える。

Infinite symmetric productについてすぐに分かる事は，

補題 2.4.8. Xを基点付きの空間とし

$$\mu : \mathrm{SP}^\infty(X) \times \mathrm{SP}^\infty(X) \longrightarrow \mathrm{SP}^\infty(X)$$

を

$$\mu([x_1, \cdots, x_m], [y_1, \cdots, y_n]) = [x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdot, y_n]$$

で定義すると，これにより$\mathrm{SP}^\infty(X)$は可換な*topological monoid*になる。但し，単位元は$*$である。

この事実は非常に重要であるが，ここではその重要さを説明している余裕はない。このsectionの目標であるDold-ThomのTheoremに進む事にしよう。

定理 2.4.9 (Dold-Thom). (X, A)を基点付きの弧状連結な空間対とする。もし(X, A)が*NDR pair*なら，

$$\mathrm{SP}^\infty(X) \longrightarrow \mathrm{SP}^\infty(X/A)$$

は，*fiber*が$\mathrm{SP}^\infty(A)$の*quasifibration*である。

このTheoremの証明は，次のsectionで小立方体の空間を用いて行なうことにする。

Example 2.4.5で同相

$$\mathrm{SP}^\infty(S^2) = \mathrm{SP}^\infty(\mathbb{C}\mathrm{P}^1) \cong \mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$$

があることを見た。ここでfiber bundle

$$S^1 \longrightarrow S^\infty \longrightarrow \mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$$

のホモトピー群の完全列とS^∞のホモトピー群が消えていること (Corollary ??)を用いると，

$$\pi_n(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 2 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

であることが分かる。一方, ホモロジー群について

$$\widetilde{H}_n(S^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n=2 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

である。つまり

$$\pi_n(\mathrm{SP}^\infty(S^2)) \cong \widetilde{H}_n(S^2)$$

が成り立つ。これは偶然ではない。

定理 2.4.10. CW複体Xに対し自然な同型

$$\widetilde{H}_n(X) \cong \pi_n(\mathrm{SP}^\infty(X))$$

がある。

証明にはホモロジー群に関するEilenberg-Steenrodの結果 [ES52]を用いるので, ここでは証明できない。興味を持っ た読者は, Dold-Thomの論文を参照されたい。

2.5 小立方体の空間と多重ループ空間

§1.7で少し多重loop空間のことを調べたが, quasifibrationを使うと もっとずっと深い結果が得られる。この節ではquasifibrationのもう一つの応用 として, 多重loop空間の理論の概略を述べる。もちろんここではその結果を全て 証明するわけにはいかないが, 今までに述べてきたことの範囲で証明のideaを説 明する。

多重loop空間の理論で中心的な役割を果すのはlittle cubeと呼ばれるものである。

定義 2.5.1. 正の整数nに対しlittle n-cube cとは次の形 にかける連続写像$I^n \longrightarrow I^n$のことである。

$$c = \ell_1 \times \cdots \times \ell_n$$

ここで, 各$\ell_i : I \longrightarrow I$は向きを保つアフィン写像によ る埋め込みである。

little n-cubesの集合を$\mathcal{C}_n(1)$で表わす。 またcompact-open topologyにより位相を入れる。つまり$\mathcal{C}_n(1)$は $\mathrm{Map}(I^n, I^n)$の部分空間である。

j個のlittle n-cubesの空間$\mathcal{C}_n(j)$は次のように定義され る:

$$\mathcal{C}_n(j) = \{(c_1, \cdots, c_j) \in \mathcal{C}_n(1)^j | c_i(\mathrm{Int}I^n) \cap c_k(\mathrm{Int}I^n) = \emptyset \text{ if } i \neq k\}$$

$\mathcal{C}_n(j)$には, cubeの添字の置換により自然にj次対称群 Σ_jが作用する。 $\mathcal{C}_n = \{\mathcal{C}_n(j)\}_j$はlittle n-cube operadと呼ばれれる。

無限ループ空間を考えるために$n = \infty$の場合も必要となる。そこで

$$\mathcal{C}_\infty(j) = \operatorname*{colim}_n \mathcal{C}_n(j)$$

と定義する。ただし colimitは包含写像

$$I^n \times \{0\} \hookrightarrow I^{n+1}$$

で誘導された写像に関するものである。当然$\mathcal{C}_\infty(j)$にも Σ_jが作用する。

Compact-open topologyは扱いづらいものであるが, 幸いlittle cubeの空間は座 標で記述できる。

補題 2.5.2. 写像

$$\xi_n : \mathcal{C}_n(1) \longrightarrow I^{2n}$$

を$\xi_n(c) = (c(\frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{4}), c(\frac{3}{4}, \cdots, \frac{3}{4}))$で定義する。すると$\xi_n$は $\mathcal{C}_n(1)$のI^{2n}の中への開集合としての埋め込みである。

このようにlittle cubeはその像で決まるので, 次のような絵を描いて議論して も正確さを失なわない。

このような絵はホモトピー群について解説してある大抵の本には載っている。 Definition ??ではXのホモトピー群を球面からXへの基点を保つ 写像のホモトピー類として定義したが

$$\pi_n(X, *) = \{f : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, *)\}/\simeq$$

とみなすこともできる。このときホモトピー群の$n \geq 2$での可換性は次のよう に説明できる: $\alpha \in \pi_n(X)$が連続写像

$$f : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, *)$$

で代表されているとする。もう一つ$\beta \in \pi_n(X)$をとり, それが

$$g : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, *)$$

で代表されているとする。αとβの$\pi_n(X)$での積 $\alpha + \beta$は次で定義される写像

$$f + g : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, *)$$

により代表される。

一方$\beta+\alpha$は次の絵で表わされる写像

$$g+f:(I^n,\partial I^n)\longrightarrow (X,*)$$

で代表される。

$n\geq 2$ならば, これらをつなぐホモトピーはI^nの中の二つの“小さな立方体” を回転することにより得られる。

ここで$f+g$と$g+f$の定義域は$\mathcal{C}_n(2)$の元とみなすことができ ることに注意する。上の絵は, その二つの元が$\mathcal{C}_n(2)$内で道で結べ ることをいっているのである。

実際, $\mathcal{C}_n(2)$は弧状連結である。より一般に次が知られている。

補題 2.5.3. $\mathcal{C}_n(j)$は$(n-2)$-*connected*である。

$\mathcal{C}_n(2)$の弧状連結という性質から $\pi_n(X)$の可換性そして$\Omega^n X$のホモトピー可換性が得られた。こ のことから$\mathcal{C}_n(j)$を調べれば$\Omega^n X$のもっと深い性質が得られると期待 するのは自然である。

それを最初に考察したのがBoardmanとVogt [BV68; BV73]だった。その数年後, Peter Mayがlittle cubeを用いた多重ルー プ空間の理論を完成させ[May72]として出版した。このsectionの残 りの部分でMayの結果の概略を述べ, そしてその後の発展についても少し触れることにする。

次の写像はlittle cubeの空間 $\mathcal{C}_n(j)$とn重ループ空間 $\Omega^n X$の関係を調べる際, 最も基本的なものである。

定義 2.5.4. 基点付き空間Xに対し写像

$$\theta_{n,j}:\mathcal{C}_n(j)\times(\Omega^n X)^j\longrightarrow\Omega^n X$$

を次のように定義する: $(c_1,\cdots,c_j)\in\mathcal{C}_n(j)$と $\omega_1,\cdots,\omega_j\in\Omega^n X$に対し

$$\theta_{n,j}(c_1,\cdots,c_j;\omega_1,\cdots,\omega_j):I^n\longrightarrow X$$

は各cube $c_i(I^n)$上でω_iで与えられそれ以外の点は基点に写す。 より正確には次で与えられる。

$$\begin{aligned}&\theta_{n,j}(c_1,\cdots,c_j;\omega_1,\cdots,\omega_j)(t)\\&\quad=\begin{cases}\omega_i(c_i^{-1}(t)) & \text{if } t\in c_i(I^n)\text{ for some } 0\leq i\leq j,\\ * & \text{otherwise.}\end{cases}\end{aligned}$$

$\theta_{n,j}$は明らかにΣ_j-equivariantである。よって商空間 の間の写像を誘導する。これも同じ記号

$$\theta_{n,j} : \mathcal{C}_n(j) \times_{\Sigma_j} (\Omega^n X)^j \longrightarrow \Omega^n X$$

で表わすことにする。

これらの写像$\{\theta_{n,j}\}$は次の関係をみたす。

補題 2.5.5. *$*$を基点への定値写像, つまり$\Omega^n X$の基点とする。 $(c_1, \cdots, c_j) \in \mathcal{C}_n(j)$と$\omega_1, \cdots, \omega_{i-1}, \omega_{i+1}, \cdots, \omega_j \in \Omega^n X$に対し次が成り立つ。*

$$\begin{aligned} & \theta_{n,j}(c_1, \cdots, c_j; \omega_1, \cdots, \omega_{i-1}, *, \omega_{i+1}, \cdots, \omega_j) \\ = \quad & \theta_{n,j-1}(c_1, \cdots, c_{i-1}, c_{i+1}, \cdots, c_j; \omega_1, \cdots, \omega_{i-1}, \omega_{i+1}, \cdots, \omega_j) \end{aligned}$$

定義 2.5.6. 基点付き空間Yに対し, operad $\mathcal{C}_n$の作用とは写像

$$\theta_j : \mathcal{C}_n(j) \times_{\Sigma_j} Y^j \longrightarrow Y$$

$(j = 0, 1, \cdots)$の族でLemma 2.5.5の式をみたすものである。

つまり, n重ループ空間には$\mathcal{C}_n$が作用すると言うことができる。 逆に, Mayは$\mathcal{C}_n$の作用を持つものはn重ループ空間と弱同値である ことを示した。

定理 2.5.7 (Recognition Principle). *Xを弧状連結で非退化な基点(Definition ??)を持つ空間とする。 Xがn重ループ空間と弱同値であるための必要十分条件はlittle n-cube operadの作用を持つことである。*

証明. [May72]参照。 □

Lemma 2.5.5の関係式は空間 $\mathcal{C}_n(j) \times_{\Sigma_j} (\Omega^n X)^j$をまとめ上げて一つの空間 $C_n(\Omega^n X)$にするのに用いることができる。

定義 2.5.8. Yを基点$*$を持つ位相空間とする。 $\coprod_j \mathcal{C}_n(j) \times_{\Sigma_j} Y^j$上の同値関係$\sim$を 次の関係で生成されたものとする。

$$\begin{aligned} & (c_1, \cdots, c_j; y_1, \cdots, y_{i-1}, *, y_{i+1}, \cdots, y_j) \\ & \sim (c_1, \cdots, c_{i-1}, c_{i+1}, \cdots, c_j; y_1, \cdots, y_{i-1}, y_{i+1}, \cdots, y_j). \end{aligned}$$

この同値関係を用いて$C_n(Y)$を

$$C_n(Y) = \left(\coprod_j \mathcal{C}_n(j) \times_{\Sigma_j} Y^j \right) / \sim .$$

で定義する。

系 2.5.9. $\{\theta_{n,j}\}$は*well-defined*で連続な写像

$$\theta_n : C_n(\Omega^n X) \longrightarrow \Omega^n X$$

を誘導する。

$C_n(Y)$は任意の基点つき空間Yに対し定義されることに注意する。また $\mathcal{C}_n(1) \times Y$の包含写像により, 自然な写像

$$\sigma_n : Y \longrightarrow C_n(Y)$$

が得られる。$Y = \Omega^n X$のときには$\theta_n \circ \sigma_n \simeq id$であることはすぐ分かる。つまり, Yがn重ループ空間$\Omega^n X$と同値なときにはYは$C_n(Y)$のretractである。

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\sigma_n"] \arrow[dr, "id"'] & C_n(Y) \arrow[d, "\theta_n"] \\ & Y. \end{tikzcd}$$

$\Omega^n X$上のevaluation map

$$\mathrm{eval} : \Sigma^n(\Omega^n X) \longrightarrow X$$

とFreudenthal suspension

$$E^n : X \longrightarrow \Omega^n \Sigma^n X$$

に対して次の図式は可換になる。

$$\begin{tikzcd} \Omega^n X \arrow[r, "E^n"] \arrow[dr, "id"'] & \Omega^n \Sigma^n(\Omega^n X) \arrow[d, "\Omega^n \mathrm{eval}"] \\ & \Omega^n X. \end{tikzcd}$$

二つのfunctor C_n と $\Omega^n\Sigma^n$ がこのように良く似ているこ とは次のMayのTheoremで説明される。

定理 2.5.10 (Approximation Theorem). Xを非退化な基点を持つ弧状連結な空間とする。このとき次の弱同値がある。

$$C_n(X) \simeq \Omega^n \Sigma^n X.$$

Recognition Principleはoperadの理論の起源となったという点で重要である。 しかしながら, ホモトピー論への現実的な応用としては Approximation Theoremの方がずっと有用である。というのも, それは多重ルー プ空間の組み合わせ論的なモデルを与えているからである。ループ空間のように 無限次元の空間はそのままでは非常に扱いづらいが, Approximation Theoremの ように有限のもので近似されるとずっと楽になる。

注意 2.5.11. Mayのmodelの他にも, 様々な$\Omega^n\Sigma^n X$のmodelが考えられてきた。 最も古いのは, $\Omega\Sigma X$のmodelであるJamesのreduced product [Jam55]だろう。Milgram [Mil66]はJamesの構成を一般化して $\Omega^n\Sigma^n X$のmodelを作った。Segal [Seg73]は, little cubeではなくEuclid空間の異なる点配位の成す空間(configuration space)を用いることを提案した。Mayの方法は, J. Caruso と S. Waner [CW81] により改良され, 連結でない空間のApproximation Theorem が得られている。 §?? で分類空間の構成に用い た単体的手法による構成は, $n=1$のときMilnor [Mil72], $n=\infty$ のときBarratt と Eccles [BE74], そして一般のnに対して は Jeff Smith [Smi89]により得られている。

これらの model は本質的には同値である。§2.4でみたように, 幾何学的 (解析的?) 問題からは, ある条件をみたす点の集まりが自然に現われることが多く, その場合には Segal の configuration space model を使うと loop 空間との関連を調べることができる。 例えば [Coh+91] を見るとよい。 ホモトピー論では, もちろん“little cube model”が最も応用範囲が広い。

MayはApproximation Theorem (Theorem 2.5.10)を path-loop fibration

$$\Omega^n\Sigma^n X \longrightarrow P\Omega^{n-1}\Sigma^n X \longrightarrow \Omega^{n-1}\Sigma^n X$$

のlittle cube modelを構成することにより証明した。

定義 2.5.12. 基点付き空間の対(X,A)に対し, $E_n(X,A)$を次の条件をみたす$C_n(X)$の点$(c_1,\cdots,c_j;x_1,\cdots,x_j)$の成す部分空間とする: $x_j\notin A$ ならばc_jの第一座標を右に延ばしても他のcubeの内 部と交わらない。

定理 2.5.13 (May).

1. *Xが非退化な基点を持つ弧状連結な空間ならば, 次は quasifibrationである。*

$$C_n(X) \longrightarrow E_n(CX,X) \longrightarrow C_{n-1}(\Sigma X) \tag{2.6}$$

また自然な写像

$$\begin{aligned} \alpha &: C_n(X) \longrightarrow \Omega^n\Sigma^n X \\ \tilde{\alpha} &: E_n(CX,X) \longrightarrow P\Omega^{n-1}\Sigma^n X \end{aligned}$$

で次をhomotopy可換にするものが存在する。

$$\begin{tikzcd} C_n(X) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & E_n(CX,X) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{\alpha}"] & C_{n-1}(\Sigma X) \arrow[d, "\alpha"] \\ \Omega^n\Sigma^n X \arrow[r] & P\Omega^{n-1}\Sigma^n X \arrow[r] & \Omega^{n-1}\Sigma^n X. \end{tikzcd}$$

2. *$E_n(CX,X)$は可縮である。よってαは弱同値である。*

このTheoremの前半は, Dold-Thom Criterionが用いて証明される。より正確にはCorollary 2.3.8を用いる。$C_n(X)$には自然にfiltrationが入る。

定義 2.5.14. $m \geq 0$に対し

$$F_m C_n(X) = \left(\coprod_{j \leq m} \mathcal{C}_n(j) \times_{\Sigma_j} X^j \right) / \sim$$

と定義する。これは$C_n(X)$の部分空間である。

Mayの証明は, Dold-Thom Criterionを用いてある写像がquasifibrationであるこ とを証明するときの典型的な例である。§2.4のDold-Thomの定理 (Theorem 2.4.9)も実はlittle cubeの枠組でTheorem 2.5.13の証明をそのまま流用して証明できる。それをみるために, 次に little cubeと対称積の関係を考える。

これまでは互いに交わらないcubeを考えてきたが, ここで交わりを許してみよう。

定義 2.5.15. $\mathcal{D}_n(j) = \mathcal{C}_n(1)^j$とおく。これは$j$個の交わりを許した little n-cubeのなす空間である。

j次対称群は$\mathcal{D}_n(j)$にもcubeの番号の付け替えで作用する。 $C_n(X)$の定義をそのまま適用することにより, $\{\mathcal{D}_n(j)\}$か ら$D_n(X)$が定義される。

little cube operad $\mathcal{C}_n$は$D_n(X)$に自然に作用するので, recognition principleから$D_n(X)$はn重ループ空間と弱同値であることが わかる。実際これは無限対称積とホモトピー同値であることがすぐわかる。

命題 2.5.16. 任意の基点付き空間Xに対し, $D_n(X)$は$\mathrm{SP}^\infty(X)$とホモト ピー同値である。

証明. $\mathcal{D}_n(j)$はΣ_jの作用も込めて可縮である。 □

$C_n(X)$ と $D_n(X)$ は二つの極端な場合である: $\mathcal{C}_n(j)$では cubeは互いに交わらず, 一方$\mathcal{D}_n(j)$ではどのような交わり方も許さ れる。ここで次の中間のものを考えよう。

定義 2.5.17. $\mathcal{D}_n^i(j)$を次の条件をみたす j little cube $(c_1, \cdots, c_j)$の成す $\mathcal{D}_n(j)$の部分空間とする: 任意の$t \in I^n$は高々i個のcubeの像の内部にしか含まれない。

$\mathcal{D}_n^i(j)$にもΣ_jが作用する。基点付き空間Xに対し, $D_n^i(X)$を$C_n(X)$を定義したやりかたで定義する。

よって次の部分空間の列

$$C_n(X) = D_n^0(X) \subset D_n^1(X) \subset \cdots \subset D_n^\infty(X) = D_n(X)$$

が得られる。

注意 2.5.18. 次の図式

$$\begin{tikzcd} C_n(X) \arrow[rr, "\subset"] & & D_n(X) \\ & X \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

は可換であり, またホモトピー群に誘導された写像

$$\pi_*(X) \longrightarrow \pi_*(D_n(X)) \cong \pi_*(\mathrm{SP}^\infty(X)) \cong \widetilde{H}_*(X)$$

がHurewicz準同形と一致することから implies that the Hurewicz 準同形が$\pi_*(D_n^i(X))$を通っていることがわかる。

$$\begin{tikzcd} \pi_*(D_n^i(X)) \arrow[rr, "\subset"] & & \widetilde{H}_*(X) \\ & \pi_*(X). \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

加藤史子氏(現佐藤史子)は, 修士論文[Kat96]で$D_n^i(X)$のホモトピー 型を決定した。

定理 2.5.19. 弧状連結な基点付き空間Xで$(X,*)$が*strong NDR pair*なものに対し, 次の弱同値がある。

$$D_n^i(X) \simeq \Omega^n \,\mathrm{SP}^i\, \Sigma^n X.$$

証明はMayのquasifibration (2.6)の構成を拡張することにより行なう。

$$\mathcal{D}_0^i(j) = \begin{cases} * & \text{if } j \le i \\ \emptyset & \text{if } j > i \end{cases}$$

なので

$$D_0^i(X) = \mathrm{SP}^i(X)$$

である。もしquasifibration

$$D_n^i(X) \longrightarrow E \longrightarrow D_{n-1}^i(\Sigma X)$$

でEが可縮なものが得られれば, 弱同値

$$D_n^i(X) \simeq \Omega D_{n-1}^i(\Sigma X) \simeq \cdots \simeq \Omega^n D_0^i(\Sigma^n X) = \Omega^n \,\mathrm{SP}^i\, \Sigma^n X$$

が得られる。

定義 2.5.20. 弧状連結な基点付き空間の対(X,A)に対し $E_n^i(X,A)$を次の条件をみ たす$C_n^i(X)$の点 $(c_1,\cdots,c_j;x_1,\cdots,x_j)$ の成す部分空間 とする: $x_j \notin A$ ならばc_jの第一座標を右に述ばしても高々 i個の他のcubeとしか内部で交わらない。

定理 2.5.21. Xが基点付き空間で$(X,*)$が*strong NDR pair*のとき, 射影

$$E_n^i(CX,X) \longrightarrow D_{n-1}^i(\Sigma X)$$

は基点上の*fiber*が $D_n^i(X)$である*quasifibration*である。

更に$E_n^i(CX,X)$は可縮である。

この結果は, Dold-ThomのquasifibrationとMayのquasifibrationを統合するもの である。

これまででlittle cubeを用いると様々なループ空間が構成できることがわかっ た。それで何がうれしいのだろうか? その応用を考える際に最も重要なのが Snaithの分解定理である。

定理 2.5.22. 非退化な基点を持った空間Xと正の整数nに対し次の弱安定同値がある。

$$\Omega^n\Sigma^n X \underset{S}{\simeq} \bigvee_{j=1}^{\infty} F_jC_n(X)/F_{j-1}C_n(X) \tag{2.7}$$

これは$n=\infty$でも成り立つ。

注意 2.5.23. この分解で現われた成分は

$$F_jC_n(X)/F_{j-1}C_n(X) = \mathcal{C}_n(j)_+ \wedge_{\Sigma_j} X^{\wedge j}$$

と表わせる。

この定理の応用を述べるためにはホモトピー論に深入りしすぎてしまうので, こ こではJamesによって証明された$n=1$の場合について簡単に触れこのsectionを 終えることにしよう。

定理 2.5.24. 非退化な基点を持った空間Xに対し, 次の自然な弱同値がある。

$$\Sigma C_1(X) \simeq \Sigma\left(\bigvee_{j=1}^{\infty} X^{\wedge j}\right)$$

ここで$X^{\wedge j}$はXのj個の*smash*積である。

JamesはこのPを用いてHopf invariantと呼ばれる写 像を定義した。

定義 2.5.25. 写像

$$H : \Omega S^{n+1} \longrightarrow \Omega S^{2n+1}$$

を次の合成のadjointで定義する:

$$\begin{aligned} \Sigma\Omega S^{n+1} &\simeq \Sigma C_1(X) \\ &\simeq \Sigma\left(\bigvee_{j=1}^{\infty} S^{nj}\right) \\ &\longrightarrow S^{2n+1} \end{aligned}$$

ここで最後の写像は第2成分への射影である。

このHopf invariant Hは次の重要な性質を持つ。

定理 2.5.26. Hの*homotopy fiber*は2で局所化すればS^nと*homotopy*同値である。更に, その*homotopy*同値により*fiber*の*inclusion*は*Freudenthal suspension*

$$E : S^n \longrightarrow \Omega S^{n+1}$$

と同一視される。

つまり次のfibrationがあるということである。

$$S^n_{(2)} \xrightarrow{E} \Omega S^{n+1}_{(2)} \xrightarrow{H} \Omega S^{2n+1}_{(2)}$$

ここで$X_{(2)}$は空間Xを2で局所化した空間と呼ばれるもので, そのホモトピー群はXのhomotopy群の2成分だけ取り出したものと同型になっている。

系 2.5.27. 次の完全列がある。

$$\cdots \longrightarrow \pi_i(S^n)_{(2)} \xrightarrow{E} \pi_{i+1}(S^{n+1}) \xrightarrow{H} \pi_{i+1}(S^{2n+1}) \xrightarrow{P} \pi_{i-1}(S^n) \longrightarrow \cdots$$

定義 2.5.28. 上の完全列を EHP sequence という。

EHP sequence は球面のホモトピー群の研究では中心的な役割を果す。 ここでは残念ながら詳しく述べる余裕はないが, 興味を持った読者は是非 [Tod62] か [戸三75] の第10章に挑戦してもらいたい。

3　現代のホモトピー論とファイバー空間

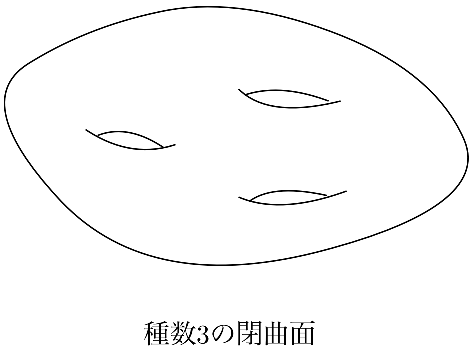
これまでみてきたように，ファイバー束を始めとする各種ファイバー空間は，ホ モトピーという概念と密接に結びついている。そしてその誕生以来ホモトピー論 にとってなくてはならない道具であり続けてきた。

このnoteの最後のChapterとして，ここでホモトピー論とファイバー空間の関係 についてまとめてみることにする。まずホモトピー論とは何か，いや 代数的トポロジーとは何かというところから始めよう。

3.1　ホモトピー論とは何か

トポロジーという分野が生まれた時から，その基本的な目標は位相空間を分類する ことであった。より正確に述べると，空間XとYが与えられたとき，XとY が同相か否かを決定することである。もちろんこれは難しい問題で，一般的には 不可能であるが，簡単な空間の場合には完全に分類ができる場合もある。例えば，

定理 3.1.1. S, S'を向きづけられた閉曲面とする。すると, $S \cong S'$ (同相)であるた めの必要十分条件は, SとS'の“穴の数”が等しいことである。



種数3の閉曲面

定義 3.1.2. 向き付け可能な閉曲面Sの穴の数をSのgenus (種数)といい，$g(S)$と書く。

2次元の空間についてこれだけ良い結果があると，これを高次元に拡張したくな るのが普通である。高次元の空間に対する$g(S)$の一般化を定義したのはBetti である。

定理 3.1.3. n次元の多様体Mに対し，正の整数

$$b_1(M), b_2(M), \cdots, b_{n-1}(M)$$

が定義され，向き付け可能な閉曲面Sに対し，$b_1(S) = 2g(S)$である。

このTheoremにより，$b_i(M)$は向き付け可能な閉曲面に対するgenusの一般化に なっている。これらをBetti数という。閉曲面の場合のように，Betti数によりn次元多様体が分類できればよいのであるが，残念ながらそこま では望めない。しかし，Betti数を使うことによりある程度の結果は得られる。

定理 3.1.4. M, M'をn次元多様体とする。MとM'が同相なら全てのiについて，$b_i(M) = b_i(M')$である。

系 3.1.5. もし$b_i(M) \neq b_i(M')$であるiが一つでも存在すれば，MとM'は同相で はない。

このような数はずっと以前にも定義されていた。

定義 3.1.6. 多面体Kに対し，$t_n(K)$をKのn次元単体の数とする。このときKの Euler標数$\chi(K)$を

$$\chi(K) = t_0(K) - t_1(K) + \cdots + (-1)^n t_n(K) + \cdots$$

で定義する。

定理 3.1.7. KとK'が同相なら$\chi(K) = \chi(K')$である。

これまで見てきたのは，だいたい19世紀から20世紀の初めあたりのideaである。 基本的な考え方は，空間Xに対し何かある整数$F(X)$を対応させて，その数を 調べることにより空間の性質を導き出そうというものである。別の言い方をすれ ば，空間全体の上の関数のようなもの

$$F : \{空間\} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

を考えることである。こういうものを空間Xの不変量(invariant)という。上 でみた例では，全て

$$X \cong X' \Longrightarrow F(X) = F(Y)$$

となっていた。このようなものを位相不変量(topological invariant)という。

20世紀になると，topologyが新しい分野として発展していくと共に，新しいidea がいろいろとあらわれた。それまでと本質的に異なるのは，空間に対し数ではな く群などの代数

的構造を対応させるようになったことである。そのなかで最初に 現れたのは, Poincaréによって導入されたhomology群である。Poincaréは, 空間Xに対し可換群

$$H_0(X),\ H_1(X),\ H_2(X),\cdots$$

を定義した。このhomology群は, Betti数やEuler標数とよく似た性質を持つ。

命題 3.1.8. XとX'が同相なら, 全てのiについて

$$H_i(X) \cong H_i(X')$$

である。

このようにhomologyがBetti数やEuler標数と同じような性質を持つのは偶然では なく, 実は, Betti数やEuler標数はhomologyから定義されるのである。

定理 3.1.9. 有限生成可換群Aを

$$A \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z}$$

と書いたとき,

$$\mathrm{rank}\, A = \mathbb{Z}\text{の数}$$

と定義する。すると

$$b_i(M) = \mathrm{rank}\, H_i(M)$$

である。また

$$\begin{aligned} \chi(K) &= b_0(K) - b_1(K) + b_2(K) - \cdots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \,\mathrm{rank}\, H_i(K) \end{aligned}$$

である。

つまりPoincaré以前の位相不変量という考えは, 次のように分解でき

$$\{\text{空間}\} \xrightarrow{H_*(-)} \{\text{可換群}\} \xrightarrow{\text{様々な操作}} \text{数}$$

Betti数などの位相不変量によって得られた本質的な情報は, homology群 $H_*(X)$に含まれていることがわかる。

これからhomologyがそれまでの手法を全て統一する革新的なideaだということが わかるが, それではそのhomologyによってどの様な情報が得られるのだろうか。 Homology群の位相不変性により

$$H_*(X) \ncong H_*(Y) \Longrightarrow X \ncong Y$$

であることはわかるが, 逆に

$$H_*(X) \cong H_*(Y) \Longrightarrow X \cong Y$$

は言えるだろうか。これが本当なら, homologyが空間が同相かどうかを完全に決 定することになるが, 残念ながら次の結果でわかるようにこれは正しくない。

定理 3.1.10. $X \simeq Y$なら, $H_*(X) \cong H_*(Y)$である。

例えば, $D^n \simeq \{*\}$だから, D^nと一点は同相でないにも関わらず, $H_*(D^n) \cong H_*(\{*\})$となる。

しかしながら特別な場合に限れば, もっとよい情報が得られることもある。それ を期待したのが有名なPoincaré予想である。

予想 3.1.11. Mを単連結なn次元多様体とする。もし*homology*がn次元球面と同型

$$H_*(M) \cong H_*(S^n)$$

なら, MはS^nと同相である。

$n=0,1$の時は簡単である。$n=2$の時は, 閉曲面の分類定理Theorem 3.1.3である。$n \geq 5$の時は, 1960年代にS. Smaleにより解決された。 $n=4$の時は, M. Freedmanにより1980年代に証明された。残るは$n = 3$の場合だ けであるが, これは未だに未解決である。Poincaréが最初に考えたのは, $n=3$の場合であるのだが。

さて20世紀前半では, Euler標数などの古くから考えられていた不変量が, homologyの言葉で統一的に解釈された一方で, 全く新しい道具も現れてきた。そ れがHurewiczにより導入されたhomotopy群である。Homotopy群の定義から

$$X \simeq Y \Longrightarrow \pi_*(X) \cong \pi_*(Y)$$

であることはすぐにわかる。実は, CW複体についてはこの逆も成り立つのである。

定理 3.1.12. XとYを*CW*複体とする。もし連続写像$f : X \longrightarrow Y$で*homotopy* 群の同型

$$f_* : \pi_*(X) \xrightarrow{\cong} \pi_*(Y)$$

を誘導するものがあれば, fはXとYの間の*homotopy*同値

$$X \simeq Y$$

を与える。

同様のことは, homologyについても成り立つ。

定理 3.1.13. XとYを単連結な*CW*複体とする。もし連続写像$f : X \longrightarrow Y$で *homology*群の同型

$$f_* : H_*(X) \xrightarrow{\cong} H_*(Y)$$

を誘導するものがあれば, fはXとYの間の*homotopy*同値

$$X \simeq Y$$

を与える。

この二つのTheoremが言っているのは, $H_*(-)$とか$\pi_*(-)$は, 元々空間が 同相かどうかを調べる道具ではなく, homotopy同値かどうかを調べる道具である ということである。Homotopy群の場合には, homotopy集合として定義されていた から当たり前と言えば当たり前であるが, まったくhomotopyと関係なく定義され たようなhomology群もhomotopyと関係が深いと言うのは, 面白い事実である。

別の見方をすれば, これはhomotopy同値というのが, 空間どうしの関係として非 常に基本的な関係だからに他ならない。

その後homology, homotopy群以外にも様々な道具が導入された。例えば, cohomology群$H^*(X)$やK-theory $K(X)$などである。これらもhomotopy不変 なのである。

定理 3.1.14. XとYが*homotopy*同値なら,

$$H^*(X) \cong H^*(Y)$$

である。

定理 3.1.15. XとYが*homotopy*同値なら,

$$K(X) \cong K(Y)$$

である。

Cohomology群はhomology群と非常に関係が深いから, homology群とよく似た性質 を持つのは当たり前であるが, vector bundleの研究のために導入された K-theoryまでがこのような性質を持つと言うのは驚きではないだろうか。空間を研究する ために導入された道具がことごとくhomotopy不変という性質を持ってしまってい るのである。Cohomology群とK-theoryについて, これを説明するのは次の事実 である。

定理 3.1.16. 正の整数nに対し, 整係数のn次*Eilenberg-Mac Lane*空間を

$$K(\mathbb{Z}, n) = B^n\mathbb{Z}$$

で定義する。ここで右辺は$\mathbb{Z}$の分類空間をn回取ったものである。

すると, 任意のCW複体Xに対し

$$H^n(X) \cong [X, K(\mathbb{Z}, n)]$$

である。

定理 3.1.17. 包含写像

$$U(n) \hookrightarrow U(n+1)$$

により誘導される写像

$$B\mathrm{U}(n) \longrightarrow B\mathrm{U}(n+1)$$

により

$$B\mathrm{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} B\mathrm{U}(n)$$

と置く。すると*paracompact Hausdorff*空間Xに対し

$$K(X) \cong [X, B\mathrm{U} \times \mathbb{Z}]$$

である。

後者のK-theoryに関する定理は, ほとんどprincipal $U(n)$-bundleの分類定 理である。また§2.4では, Theorem 2.4.10よりホモロジー群もホモトピー集 合で表わされること

$$\widetilde{H}_n(X) \cong [S^n, SP^\infty(X)]$$

もみた。このように空間Xに対し集合$F(X)$を対応させるものは, 何かある空 間Tにより

$$\begin{array}{ccc} \{\text{空間}\} & \longrightarrow & \{\text{集合}\} \\ X & \longmapsto & [X, T] \\ X & \longmapsto & [T, X] \end{array}$$

という対応で与えられているもの, あるいはこのような対応と他の対応の合成で 表わされることが多い。

注意 3.1.18. コホモロジーやK-theoryのように, ホモトピー集合として「表現」されるもの を特徴付けるのがBrownの表現定理である。それにつ いてはここでは詳しく述べることはできないが, 例えば[Ara75]を見て もらいたい。

そこで, 逆にホモトピー集合の一般的な性質を調べれば, 空間についてこれらの 古典的な道具で得られるものを含んだより詳しい情報が得られるだろう, という のがホモトピー論の基本的な考えなのである。

3.2 モデル圏による公理化

では, ホモトピー集合, いやホモトピーを特徴付ける性質とは何だろう?

§1.8ではfibrationに対し長い完全列がある (Corollary 1.8.18)ということをみた。それに対応する cofibrationの性質はCorollary 1.10.20である。これらが重 要であることは疑いの余地もないが, これらはfibrationとcofibrationのCHPと HEPという二つの性質から得られたものだった。ではCHPとHEP以外には何が必要 だろうか? CHPとHEPだけで何でもできるのだこうか?

これを考えたのが D. Quillen である。彼は著書「Homotopical Algebra」 [Qui67]でfibration, cofibration, homotopy同値の持つ性 質を公理化しclosed model categoryというものを定義した。その後, Quillenの 定義は改良され, Quillenがclosed model categoryと定義したものは, 現在では 単にmodel categoryと呼ばれている。

定義 3.2.1. Model categoryとはcategory $\mathcal{C}$に fibration, cofibration, weak equivalenceと呼ばれる三種類のmorphism が指定されたもので, 次の条件をみたすものである:

1. $\mathcal{C}$は任意のlimitとcolimitで閉じている。
2. 次の可換図式で
$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$
iがcofibrationでpがfibrationで, iかpのどちらかがweak equivalenceならば, 図式を可換にするmorphism
$$B \longrightarrow X$$
が存在する。
3. 任意のmorphism $f : X \longrightarrow Y$は, weak equivalenceであ るfibration $p : E \longrightarrow Y$と cofibration $i : X \longrightarrow E$ により$f = p \circ i$と分解できる。また, pをfibrationでiを weak equivalenceであるcofibrationととることもできる。
4. fとgを$g \circ f$が存在する$\mathcal{C}$のmorphismとする。こ のとき$f, g, g \circ f$のどれか二つがweak equivalenceならば, 残り 一つもそうである。
5. 次の可換図式で水平な合成が共に恒等射であるとする。
$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & C & \longrightarrow & A \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ B & \longrightarrow & D & \longrightarrow & B \end{array}$$
このときgがfibration, cofibration, weak equivalenceならばfも そうである。

Model categoryについて詳しく知りたい読者はDwyer-Spalinskiによる解説 [DS95]を読んだ後でHoveyの本[Hov99] を読むことをおすすめする。

Model categoryの例としては，位相空間の成すmodel categoryが最も基本的なも のだろう。[Hov99]では，fibrationをSerre fibration, cofibrationを relative cell complexのinclusion, そしてweak equivalenceをホモトピー群の 同型を誘導する写像とすれば，位相空間と連続写像のcategoryがmodel category になることが示されている。

Model categoryの例としては，他には鎖複体(chain complex)全体の成すものな どがある。鎖複体の成すcategoryはstable, つまりsuspensionがisomorphismに なるという特徴がある。このようなものを一般化したものをtriangulated categoryといい，代数幾何や表現論で重要であ る。詳しくはNeemanの本[Nee01]などを参照されたい。

さて，このように公理化されてしまうと

$$\text{Homotopy論} = \text{Model categoryの研究}$$

と言い切ってしまってもいいように思うかもしれない。

しかしながら，忘れてはならないのは様々な興味深い空間や写像の存在である。 ここで思い出して欲しいのは，Chapter 2で，quasifibrationを用いて様々な空間や写像が構成されたことである。 §??でみたMilnorやMilgramのuniversal bundleの構成も，Gが逆元を 持たない場合はfiber bundleにはならずquasifibrationでしかない。 そしてquasifibrationはpull-backで保存されないのである。つまり「当たり前」 のことを証明するだけならmodel categoryの言葉だけでよいが，新しい道を切り 開くためにはquasifibrationのようなmodel categoryの枠組みに収まり切れない 道具が必要なのである。

もしこのnoteを読んでホモトピー論をもっと勉強してみようと思った読者がいれ ば，このことを頭の隅にでもおいておいて欲しい。

参考文献

[Ada60] J. F. Adams. “On the non-existence of elements of Hopf invariant one”. In: *Ann. of Math. (2)* 72 (1960), pp. 20–104 (cit. on p. 16).

[Ara75] Shôrô Araki. *Generalized Cohomology*. Vol. 4. Kinokuniya Series in Mathematics. in Japanese. Tokyo: Kinokuniya Bookstore, 1975 (cit. on p. 106).

[BE74] M. G. Barratt and Peter J. Eccles. “Γ^+-structures. I. A free group functor for stable homotopy theory”. In: *Topology* 13 (1974), pp. 25–45 (cit. on p. 95).

[BV68] J. M. Boardman and R. M. Vogt. “Homotopy-everything H-spaces”. In: *Bull. Amer. Math. Soc.* 74 (1968), pp. 1117–1122 (cit. on p. 92).

[BV73] J. M. Boardman and R. M. Vogt. *Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 347. Berlin: Springer-Verlag, 1973, pp. x+257 (cit. on p. 92).

[Coh+91] F. R. Cohen, R. L. Cohen, B. M. Mann, and R. J. Milgram. “The topology of rational functions and divisors of surfaces”. In: *Acta Math.* 166.3-4 (1991), pp. 163–221. URL: `http://dx.doi.org/10.1007/BF02398886` (cit. on p. 95).

[CW81] J. Caruso and S. Waner. “An approximation to $\Omega^n\Sigma^n X$”. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 265.1 (1981), pp. 147–162. URL: `http://dx.doi.org/10.2307/1998487` (cit. on p. 95).

[Dol63] Albrecht Dold. “Partitions of unity in the theory of fibrations”. In: *Ann. of Math. (2)* 78 (1963), pp. 223–255 (cit. on p. 31).

[DS95] W. G. Dwyer and J. Spaliński. “Homotopy theories and model categories”. In: *Handbook of algebraic topology*. Amsterdam: North-Holland, 1995, pp. 73–126. URL: `http://dx.doi.org/10.1016/B978-044481779-2/50003-1` (cit. on p. 108).

[DT58] Albrecht Dold and René Thom. “Quasifaserungen und unendliche symmetrische Produkte”. In: *Ann. of Math. (2)* 67 (1958), pp. 239–281 (cit. on pp. 75, 78, 81, 82).

[ES52] Samuel Eilenberg and Norman Steenrod. *Foundations of algebraic topology*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1952, p. xv 328 (cit. on p. 90).

[Hov99] Mark Hovey. *Model categories*. Vol. 63. Mathematical Surveys and Monographs. Providence, RI: American Mathematical Society, 1999, p. xii 209. ISBN: 0-8218-1359-5 (cit. on p. 108).

[Jam55] I. M. James. “Reduced product spaces”. In: *Ann. of Math. (2)* 62 (1955), pp. 170–197 (cit. on p. 95).

[Kat96] F. Kato. “On the space realizing the intermediate stages of the Hurewicz homomorphism”. MA thesis. Department of Mathematics, Shinshu University, Mar. 1996 (cit. on p. 97).

[LW69] Albert T. Lundell and Stephen Weingram. *Topology of CW-Complexes*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1969 (cit. on p. 6).

[May72] J. P. May. *The geometry of iterated loop spaces*. Lectures Notes in Mathematics, Vol. 271. Berlin: Springer-Verlag, 1972, pp. viii+175 (cit. on pp. 92, 93).

[May90] J. P. May. “Weak equivalences and quasifibrations”. In: *Groups of self-equivalences and related topics (Montreal, PQ, 1988)*. Vol. 1425. Lecture Notes in Math. Berlin: Springer, 1990, pp. 91–101. URL: `http://dx.doi.org/10.1007/BFb0083834` (cit. on pp. 76, 82).

[Mil66] R. James Milgram. “Iterated loop spaces”. In: *Ann. of Math. (2)* 84 (1966), pp. 386–403 (cit. on p. 95).

[Mil72] John W. Milnor. “On the construction of FK”. In: *Algebraic topology—a student’s guide*. Vol. 4. London Mathematical Society Lecture Note Series. London: Cambridge University Press, 1972, pp. 119–136 (cit. on p. 95).

[Nee01] Amnon Neeman. *Triangulated categories*. Vol. 148. Annals of Mathematics Studies. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2001, pp. viii+449. ISBN: 0-691-08685-0; 0-691-08686-9 (cit. on p. 108).

[Qui67] Daniel G. Quillen. *Homotopical algebra*. Lecture Notes in Mathematics, No. 43. Berlin: Springer-Verlag, 1967, iv 156 pp. (not consecutively paged) (cit. on p. 107).

[Seg73] Graeme Segal. “The stable homotopy of complex projective space”. In: *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* 24 (1973), pp. 1–5 (cit. on p. 95).

[Smi89] Jeffrey Henderson Smith. “Simplicial group models for $\Omega^n S^n X$”. In: *Israel J. Math.* 66.1-3 (1989), pp. 330–350. URL: `http://dx.doi.org/10.1007/BF02765902` (cit. on p. 95).

[Sta63] James Dillon Stasheff. “Homotopy associativity of H-spaces. I, II”. In: *Trans. Amer. Math. Soc. 108 (1963), 275-292; ibid.* 108 (1963), pp. 293–312 (cit. on p. 16).

[Ste67] N. E. Steenrod. “A convenient category of topological spaces”. In: *Michigan Math. J.* 14 (1967), pp. 133–152 (cit. on p. 43).

[Tod62] Hirosi Toda. *Composition methods in homotopy groups of spheres*. Annals of Mathematics Studies, No. 49. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1962, pp. v+193 (cit. on p. 99).

[三村護86] 三村護. ホップ空間. Vol. 26. 紀伊國屋数学叢書. 東京: 紀伊國屋書店, 1986 (cit. on p. 17).

[小中菅67] 小松醇郎, 中岡稔, and 菅原正博. 位相幾何学 *I*. 東京: 岩波書店, 1967 (cit. on pp. 6, 44).

[戸三75] 戸田宏 and 三村護. ホモトピー論. Vol. 3. 紀伊國屋数学叢書. 東京: 紀伊國屋書店, 1975 (cit. on p. 99).

[西田吾85] 西田吾郎. ホモトピー論. Vol. 16. 共立講座現代の数学. 東京: 共立出版, 1985 (cit. on pp. 43, 76, 82).

索引